VISIT…

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРАВЛИКУ

Глава первая. **Определение гидравлики, ее метод и место, занимаемое ею среди других дисциплин** 9

Глава вторая. **Главнейшие физические свойства жидкостей и силы, действующие в них** 13

2-1. Капельные жидкости и газы 13
2-2. Силы, действующие в жидкости 14
2-3. Плотность и объемный вес жидкости 19
2-4. Вязкость жидкостей. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости 21
2-5. Упругость капельных жидкостей 29
2-6. Упругость газов. Закон Клапейрона-Менделеева 30
2-7. Поверхностное натяжение и капиллярность 30

Часть первая

ГИДРОСТАТИКА

Глава третья. **Введение в гидростатику** 32

3-1. Свойство гидростатического давления в точке 33
3-2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера) 35

Глава четвертая. **Гидростатические законы для жидкости, находящейся в „абсолютном" покое** 39

4-1. Основное уравнение гидростатики и поверхности равного давления для несжимаемой жидкости, подверженной действию сил тяжести и давления 39
4-2. Определение величины абсолютного и избыточного гидростатического давления в любой точке несжимаемой жидкости. Закон Паскаля 41
4-3. Эпюра гидростатического давления 42
4-4. Гидростатический напор 43
4-5. Условия равновесия разнородных жидкостей 46
4-6. Сообщающиеся сосуды 46
4-7. Жидкостные приборы для измерения давления 47

Задачи 4-1 — 4-12 51

4-8. Статическое давление жидкости на плоскую поверхность. Гидростатический парадокс 60
4-9. Центр статического давления жидкости на плоскую поверхность 63

Задача 4-13 65

4-10. Статическое давление жидкости на криволинейные поверхности . . . 65
Задачи 4-14 — 4-19 . . . 71

Глава пятая. **Гидростатические законы для жидкости, находящейся в относительном покое** . . . 74
5-1. Дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости, находящейся в относительном покое . . . 74
5-2. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, движущемся по наклонной плоскости с ускорением . . . 75
5-3. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью . . . 77
Задачи 5-1 — 5-3 . . . 79
5-4. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг горизонтальной оси . . . 81
Задача 5-4 . . . 83

Глава шестая. **Основы теории плавания** . . . 84
6-1. Основные определения. Закон Архимеда . . . 84
6-2. Теорема Эйлера о крене . . . 86
6-3. Статическая остойчивость . . . 88
6-4. Динамическая остойчивость . . . 93
Задачи 6-1 — 6-6 . . . 94

Часть вторая
ГИДРОДИНАМИКА

Глава седьмая. **Введение в гидродинамику** . . . 99
7-1. Ламинарное и турбулентное движение . . . 99
Задачи 7-1 — 7-2 . . . 103
7-2. Движение установившееся и неустановившееся. Понятие о местной осредненной скорости . . . 104
7-3. Линия тока . . . 107
7-4. Движение жидкого элемента. Вихревое и безвихревое движение . . . 109

Глава восьмая. **Основные уравнения гидродинамики** . . . 111
8-1. Гидравлическая модель потока . . . 111
8-2. Уравнение неразрывности . . . 112
8-3. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Л. Эйлера) . . . 116
8-4. Дифференциальные уравнения Л. Эйлера в естественной форме . . . 119
8-5. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки идеальной капельной жидкости при неустановившемся и установившемся движении . . . 120
8-6. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки реальной капельной жидкости . . . 124
8-7. Диаграмма уравнения Д. Бернулли для элементарной струйки капельной жидкости . . . 126
8-8. Скоростная трубка . . . 127
8-9. Уравнение Д. Бернулли для потенциального движения капельной жидкости . . . 129
8-10. Уравнение Д. Бернулли для идеальной и реальной капельной жидкости в относительном установившемся движении . . . 130

Глава девятая. **Некоторые дополнительные вопросы гидродинамики реальной жидкости** . . . 134
9-1. Обобщенный закон трения . . . 135
9-2. Свойство гидродинамического давления в реальной жидкости . . . 135

9-3. Гидродинамическое давление в данном направлении . . . 137
9-4. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье-Стокса) . . . 140

Глава десятая. **Динамика потока** . . . 143
10-1. Живое сечение потока . . . 143
10-2. Расход потока . . . 145
10-3. Средняя скорость потока . . . 145
10-4. Уравнение неразрывности потока . . . 146
10-5. Мощность потока N в данном живом сечении потока . . . 147
10-6. Инерционная мощность потока . . . 150
10-7. Уравнение Бернулли для неустановившегося и установившегося потока реальной капельной жидкости . . . 152
10-8. Примеры гидравлического расчета установившихся и неустановившихся потоков без учета гидравлических сопротивлений . . . 156
Задачи 10-1 — 10-3 . . . 156

Глава одиннадцатая. **Гидравлические сопротивления** . . . 162
11-1. Гидравлическое моделирование . . . 162
11-2. Основные законы подобия. Критерий подобия Ньютона . . . 163
11-3. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера . . . 166
11-4. Применение методов теории размерности к исследованию гидравлических закономерностей . . . 170
11-5. Гидравлические сопротивления. Принцип наложения потерь энергии . . . 172

Глава двенадцатая. **Ламинарное движение** . . . 178
12-1. Формирование изотермического ламинарного потока . . . 178
12-2. Дифференциальное уравнение равномерного изотермического ламинарного осесимметричного движения в трубопроводах . . . 180
12-3. Равномерное изотермическое ламинарное движение в круглом трубопроводе . . . 182
Задача 12-1 . . . 187
12-4. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости между соосными цилиндрами . . . 187
12-5. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости в плоской щели . . . 190
Задача 12-2 . . . 192
12-6. Плоский радиальный ламинарный поток . . . 193
12-7. Неизотермическое ламинарное движение в круглой трубе . . . 197

Глава тринадцатая. **Основы гидродинамической теории смазки** . . . 200
13-1. Виды трения . . . 200
13-2. Основные уравнения . . . 204
13-3. Распределение давления в смазочном слое полуэна и коэффициент трения . . . 207

Глава четырнадцатая. **Турбулентное движение** . . . 210
14-1. Поле скоростей в турбулентном потоке. Начальный участок . . . 210
14-2. Дифференциальное уравнение турбулентного потока . . . 210
14-3. Распределение скоростей по сечению турбулентного потока . . . 214
14-4. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ при турбулентном движении . . . 219
14-5. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ при турбулентном движении в гладких трубах . . . 225
14-6. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ в квадратичной зоне . . . 227

14-7. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ для общего случая турбулентного потока 232
14-8. Некоторые другие эмпирические формулы и опытные данные для определения коэффициента λ в турбулентном движении при квадратичном режиме 235
14-9. Формулы для определения в турбулентном движении потерь удельной энергии в случае труб некруглого сечения . . . 239
14-10. Неизотермическое турбулентное движение в круглой трубе. Коэффициент λ и определение потерь удельной энергии . 239

Глава пятнадцатая. **Местные сопротивления** 240

15-1. Коэффициент местного сопротивления и влияние на него числа Рейнольдса 240
15-2. Потеря энергии при внезапном расширении потока. Теорема Борда-Карно 246
15-3. Потеря энергии при выходе потока из трубопровода в большой резервуар 250
15-4. Потеря энергии при постепенном расширении потока (диффузор) 250
15-5. Потеря энергии при постепенном сужении потока (конфузор) 252
15-6. Потеря энергии при внезапном сужении потока 253
15-7. Потеря энергии при входе в трубу 253
15-8. Потеря энергии при закруглении потока 255
15-9. Потеря энергии при повороте потока в колене 258
15-10. Потеря энергии в ответвлениях 259
15-11. Коэффициенты сопротивлений ζ запорных приспособлений, клапанов и других устройств 260
15-12. Экспериментальное определение коэффициента местных сопротивлений 264
Задачи 15-1 — 15-4 265

Глава шестнадцатая. **Приборы для измерения расходов жидкости** 272
Задача 16-1 279

Глава семнадцатая. **Методы расчета трубопроводов, питающихся от резервуаров, уровень жидкости в которых остается постоянным** 280

17-1. Самотечный трубопровод постоянного сечения (простой трубопровод) 281
17-2. Определение давления в произвольной точке трубопровода . . 283
17-3. Самотечный простой трубопровод переменного сечения . . . 285
Задача 17-1 286
17-4. Сифонный трубопровод, особенности его работы. Определение производительности 287
17-5. Графоаналитический метод расчета производительности сифонного или самотечного трубопровода 288
Задача 17-2 290
17-6. Графоаналитический метод расчета самотечного разветвленного трубопровода 291

Глава восемнадцатая. **Методы расчета простейших водопроводных линий** 294

18-1. Последовательное соединение трубопроводов 294
18-2. Последовательно-параллельное соединение трубопроводов . . 298
18-3. Водопровод с равномерным путевым расходом 301
18-4. Задача о трех резервуарах 303
Задача 18-1 307
18-5. Гидроэнергетический баланс насосной установки 310
18-6. Элементы экономического расчета трубопровода 311

Глава девятнадцатая. **Гидравлический удар в трубах** 314

19-1. Определение гидравлического удара 314
19-2. Формула Н. Е. Жуковского для давления при мгновенном закрытии задвижки 315
19-3. Скорость распространения ударной волны в жидкости по Н. Е. Жуковскому 319
19-4. Дифференциальные уравнения гидравлического удара . . . 320
19-5. Общий случай гидравлического удара 323
19-6. Применение уравнений удара для тупикового трубопровода (гидравлический таран) 328
19-7. Гидравлический таран 328
Задача 19-1 330

Глава двадцатая. **Истечение жидкости из отверстий и насадков при постоянном напоре** 331

20-1. Истечение жидкости из отверстия при постоянном напоре 331
20-2. Истечение жидкости из затопленного отверстия при постоянном напоре 341
20-3. Экспериментальное определение коэффициентов расхода, сжатия, скорости и сопротивления 341
20-4. Истечение жидкости из отверстия постоянной ширины в вертикальной стенке при постоянном напоре 343
20-5. Истечение жидкости из круглого отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре 345
20-6. Истечение жидкости через насадки. Внешний цилиндрический насадок 346
20-7. Истечение жидкости через коноидальные насадки 351
20-8. Истечение жидкости через внутренний цилиндрический насадок 351
20-9. Истечение жидкости через конический сходящийся насадок 352
20-10. Истечение жидкости через конический расходящийся насадок 353
20-11. Истечение жидкости через распылители 354
20-12. Траектория свободной струи. Дальность боя 355
Задачи 20-1 — 20-4 360

Глава двадцать первая. **Истечение жидкостей из резервуаров при переменных уровнях свободной поверхности. Определение времени опорожнения резервуаров** 363

21-1. Определение времени опорожнения резервуара. Общий случай 363
21-2. Определение времени истечения жидкости из резервуара с постоянным поперечным сечением по высоте 364
21-3. Определение времени истечения жидкости из резервуара с переменным поперечным сечением 365
21-4. Графоаналитический метод определения времени слива . . 369
Задачи 21-1 — 21-3 370

Глава двадцать вторая. **Сопротивление жидкости движущемуся в ней телу** 375

22-1. Силы, действующие на тело, движущееся в жидкости . . . 375
22-2. Сопротивление трения 376
22-3. Сопротивление давления 377
22-4. Волновое сопротивление 385
Задача 22-1 386

Глава двадцать третья. **Взаимодействие потока жидкости с твердым телом** 387

23-1. Сила взаимодействия жидкости с поверхностью, движущейся равномерно, поступательно и прямолинейно 387

23-2. Сила действия потока жидкости на неподвижное колено, образующее угол 90° 390
23-3. Сила действия свободной струи на неподвижную плоскую поверхность 390
23-4. Сила действия свободной струи на неподвижную криволинейную поверхность 392
23-5. Сила действия свободной струи на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно 393
23-6. Мощность струи, действующей на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно 395
23-7. Индикаторная мощность потока жидкости, действующего на поверхность, вращающуюся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси 397
23-8. Взаимодействие жидкости с телом крылового профиля. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе 400
Задачи 23-1 — 23-2 405

Глава двадцать четвертая. **Безнапорное установившееся движение жидкости** 409
24-1. Дифференциальное уравнение установившегося безнапорного потока 409
24-2. Равномерное движение 410
24-3. Скоростной коэффициент 412
24-4. Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала 414
24-5. Допускаемые скорости 417
Задачи 24-1 — 24-2 417
24-6. Дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося установившегося движения жидкости. Критическая глубина 419
24-7. Энергия сечения 420
24-8. Формы свободной поверхности 422
24-9. Уравнение прыжка 423
24-10. Интегрирование дифференциального уравнения свободной поверхности 425

Глава двадцать пятая. **Водосливы** 427
25-1. Классификация водосливов 428
25-2. Движение жидкости через водослив с тонкой стенкой . . . 428
25-3. Основная расчетная формула водослива с тонкой стенкой . . 431
25-4. Движение жидкости через водослив с широким порогом . . . 433
25-5. Основная расчетная формула водослива с широким порогом 434
25-6. Движение жидкости через водослив практического профиля 436
25-7. Расчетные формулы для определения коэффициента расхода водосливов 436

Глава двадцать шестая. **Гидравлика газов** 439
26-1. Уравнение равновесия газа. Стандартная атмосфера 440
26-2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеального газа при установившемся движении. Уравнение неразрывности 442
26-3. Скорость звука в газе 444
26-4. Истечение газа через насадок 445
26-5. Расчет газопроводов 449
Задачи 26-1 — 26-3 451

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРАВЛИКУ

Глава первая

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРАВЛИКИ, ЕЕ МЕТОД И МЕСТО, ЗАНИМАЕМОЕ ЕЮ СРЕДИ ДРУГИХ ДИСЦИПЛИН

Современная гидравлика является технической наукой. Предметом гидравлики служат жидкости и законы, действующие в них и используемые преимущественно при решении разнообразных вопросов инженерной практики, как, например, при расчетах лотоков в трубопроводах, гидротехнических сооружений, гидравлических машин и т. п.

Под жидкостями будем понимать как жидкости почти несжимаемые, т. е. капельные (вода, масло, бензин и т. п.), так и жидкости сжимаемые, т. е. газы. Такое широкое определение понятия жидкого тела допустимо потому, что многие гидравлические закономерности являются аналогичными как для капельных жидкостей, так и для газов, благодаря этому весьма важные явления и в капельных жидкостях и в газах описываются одними и теми же уравнениями.

Гидравлика делится на две части: на гидростатику и гидродинамику. Гидростатика изучает законы равновесия жидкостей и действие их на соприкасающиеся с ними твердые тела. Гидродинамика изучает законы движения жидкостей и взаимодействие их с соприкасающимися с ними покоящимися или движущимися твердыми телами.

Своими исследованиями гидравлика содействует развитию материалистического естествознания, стремящегося к познанию объективных законов движения материи. Поэтому гидравлику иногда рассматривают как одну из отраслей естествознания.

Широкое использование в народном хозяйстве гидравлических машин, механизмов и других устройств, в которых жидкость является рабочим телом, требует от инженеров механических специальностей серьезных знаний в области гидравлики.

Являясь основной дисциплиной, часто единственной во всем учебном плане, в которой студент изучает основы механики жидкого тела, гидравлика приобретает особо большое значение для специалистов машиностроителей, гидромашиностроителей, а также для специалистов по гидротехнике, водопроводу, кана-

лизации. Велико значение гидравлики в вопросах механизации и автоматизации производственных процессов. Для значительного числа технических дисциплин гидравлика является базой, без знания которой изучение их невозможно.

Слово «гидравлика» происходит от сочетания двух греческих слов ὕδωρ (хюдор) — вода и αὐλός (аулос) — труба, что свидетельствует о важности и в прошлом для гидравлики вопросов, относящихся к движению жидкостей по трубам. Круг вопросов современной гидравлики весьма велик, причем вопросы, касающиеся движения жидкости по трубам, и в настоящее время являются одними из основных ее вопросов.

Зародившаяся в глубокой древности еще в недрах общегреческой науки[1] гидравлика оформляется в самостоятельную науку лишь в начале мануфактурного периода капитализма[2]. К этому времени «...промышленность колоссально развилась и вызвала к жизни массу новых механических..., химических... и физических фактов...»[3]. Однако теоретические основы гидравлики были созданы лишь в конце XVII и середине XVIII вв. выдающимися работами Исаака Ньютона (1642—1727 гг.) и членов Петербургской академии наук Даниила Бернулли (1700—1782 гг.), Михаила Васильевича Ломоносова (1711—1765 гг.), Леонарда Эйлера (1707—1783 гг.).

Научную базу современной гидравлики составляют общие законы физики, особенно теоретической механики, а также закон Ломоносова о сохранении материи и движения. Важнейшим принципом гидравлики является принцип непрерывности Эйлера, в основу которого положено представление о жидкости как о непрерывной среде (континууме), допускающей неограниченную делимость ее материальных частичек. Согласно этому принципу такие важные для гидравлических исследований величины, как плотность, давление, количество движения, кинетическая энергия и т. д., выражаются в виде функциональных зависимостей, не имеющих в исследуемых объемах жидкости разрывов непрерывности[4].

[1] Из древних ученых нужно отметить занимавшегося вопросами гидравлики греческого философа Архимеда, жившего с 287 по 212 г. до нашей эры. Архимед в трактате «О плавающих телах» сформулировал открытый им один из основных законов гидростатики «Закон Архимеда».

[2] Из ученых этого периода следует отметить Симона Стевина (1548—1620 гг.), Галилео Галилея (1564—1642 гг.), Эвангелиста Торричелли (1608—1647 гг.), Блеза Паскаля (1623—1662 гг.). Есть основания предполагать, что существенное влияние на создание основ гидравлики имел Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), занимавшийся изучением вопросов плавания, истечения жидкостей из отверстия, сопротивления жидкостей движущимся телам, движением жидкостей по трубам и каналам и т. п.

[3] Фридрих Энгельс, Диалектика природы, ГИПЛ, 1953, стр. 145.

[4] Случаи, не удовлетворяющие этому принципу, являются особыми и в учебнике не исследуются.

Сложность явлений, происходящих в движущейся жидкости, и невозможность во многих случаях исследования их только теоретически, а также необходимость проверки теоретических положений заставляют гидравликов широко использовать эксперимент, основанный на методах подобия, являющихся в настоящее время одними из наиболее эффективных средств исследования[1].

Таким образом, методом гидравлики является совокупность аналитических и экспериментальных способов исследования гидравлических явлений.

Вопросами, родственными гидравлике, занимается и теоретическая гидромеханика, основоположником которой является Леонард Эйлер. В отличие от гидравлики теоретическая гидромеханика исследует вопросы, имеющие отношение не только к технике, значительно шире использует математические методы исследования и в меньшей степени, чем гидравлика, опирается на эксперимент. Однако все большее проникновение современной теоретической гидромеханики в область прикладных вопросов со все большим использованием экспериментальных методов исследования, так же как и широкое применение гидравликой гидромеханических методов исследования, стирает различие между этими двумя науками, по существу занимающимися изучением одних и тех же законов[2].

Своему развитию современная гидравлика обязана и выдающимся представителям инженерного дела. Большие гидротехнические работы, связанные с сооружением гидростанций, каналов, водопроводов, а также развитие кораблестроения, машиностроения и особенно гидромашиностроения способствовали открытию важных гидравлических закономерностей[3].

В нашей стране расцвет всех наук, в том числе и гидравлики, стал возможен лишь после победы Великой Октябрьской социалистической революции, когда Советская власть обобщила средства производства, сделала их собственностью всего народа и

[1] Основы теории подобия были созданы еще И. Ньютоном и дальнейшее развитие получили в трудах Осборна Рейнольдса (1842—1912 гг.), Виктора Львовича Кирпичева (1845—1913 гг.) и др.

[2] Огромный вклад в развитие теоретической гидромеханики внесли Жозеф Лагранж (1736—1813 гг.), Герман Гельмгольц (1821—1894 гг.), Луи Навье (1785—1836 гг.), Адемар Сен-Венан (1797—1886 гг.), Георг Стокс (1819—1903 гг.) и многие другие, а из русских ученых Ипполит Степанович Громека (1851—1889 гг.), Николай Егорович Жуковский (1847—1921 гг.), Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942 гг.) и многие другие.

[3] Здесь следует отметить Антуана Шези (1718—1798 гг.), Дарси (1803—1858 гг.), Юлиуса Вейсбаха (1806—1871 гг.), Базена (1829—1917 гг.), а из русских и советских ученых Дмитрия Ивановича Менделеева (1834—1907 гг.), Алексея Николаевича Крылова (1863—1945 гг.), Владимира Григорьевича Шухова (1853—1939 гг.), Николая Егоровича Жуковского, Николая Павловича Петрова (1836—1920 гг.), Николая Николаевича Павловского (1884—1937 гг.), Леонида Самуиловича Лейбензона (1879—1951), а также Б. А. Бахметева, М. А. Великанова, А. Я. Миловича, И. Г. Есьмана и др.

тем уничтожила систему эксплуатации, создала социалистические формы хозяйства. Перед советскими учеными Коммунистической партией и Советским правительством были поставлены проблемы исключительной важности, разрешение которых должно было способствовать созданию материально-технической базы коммунистического общества.

Огромное строительство, ведущееся в нашей стране, является неисчерпаемым источником, питающим многочисленные области советской науки и, в частности, советскую гидравлику. Оно способствует успешному изучению многих гидравлических явлений, созданию совершенных методов исследования рабочих процессов в гидравлических машинах и т. д.

Одной из первых крупнейших работ советского периода развития гидравлики являются работы акад. Н. Н. Павловского. В 1922 г. Н. Н. Павловский развивает теорию Н. Е. Жуковского и создает общую теорию неравномерного движения жидкости в пористой среде. Тогда же Н. Н. Павловский разрабатывает методы исследований гидравлических явлений путем электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА). Этот метод основан на аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся как к гидродинамическим, так и электрическим явлениям. Так, например, движение жидкости в грунте под плотиной исследуется путем измерения напряжения электрического поля на модели сооружения. Метод ЭГДА может применяться также для исследования обтекания тел. К достижениям советских ученых следует отнести работы И. И. Агроскина и М. Д. Чертоусова по теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах, разработанную акад. С. А. Христиановичем теорию неустановившегося движения жидкостей в каналах, акад. Л. С. Лейбензоном теорию движения природных жидкостей и газов в пористой среде, которая явилась продолжением исследований Н. Е. Жуковского.

В изучении неустановившихся процессов в трубопроводах значительные результаты достигнуты М. А. Мостковым, Н. А. Картвелишвили, А. А. Сурилом, И. А. Чарным и др.

Большие успехи были достигнуты в изучении турбулентного движения М. А. Великановым, А. Н. Колмогоровым, Л. Г. Лойцянским, А. А. Фридманом и др.[1].

Значительное развитие в трудах А. Н. Акутина, Н. М. Бернадского, Е. А. Замарина, И. И. Леви, Н. М. Мастицкого, Н. Н. Павловского, Ф. И. Пикалова, П. Я. Полубариновой-Кочиной, А. Н. Рахманова и др. получили вопросы так называемой инженерной гидравлики, под которой часто подразумевают разделы гидравлики, связанные с расчетами гидротехнических устройств (плотин, каналов и т. д.).

[1] По вопросам турбулентности в свое время мировую известность получили исследования Буссинеска (1897 г.), О. Рейнольдса (1883—1885 гг.), Т. Кармана (1930 г.), Д. Тейлора (1932 г.), Л. Прандтля (1932 г.) и др.

Советскими гидравликами уделяется большое внимание исследованию законов гидравлических сопротивлений. Особенно широкой известностью в Советском Союзе для так называемой квадратичной зоны гидравлических сопротивлений пользуется формула Н. Н. Павловского, созданная им еще в 1925 г. В практике гидравлических расчетов получила распространение формула И. И. Агроскина, предложенная в 1950 г. Наряду с формулами иностранных исследователей (Кольбрука и Уайта и др.) в настоящее время получают применение для расчета трубопроводов формулы советских исследователей (А. Д. Альтшуля, И. А. Исаева, П. Н. Конакова, Н. З. Френкеля, Ф. А. Шевелева и др.). Большой вклад внесли А. П. Юфин, В. С. Кнороз, Г. Н. Роер в исследование вопросов, связанных с гидромеханизацией.

Выполнение пятилетних планов развития народного хозяйства с уверенностью говорит о преимуществах советского государственного и общественного строя перед капиталистическим и является доказательством того, что задачи, стоящие перед советскими учеными и инженерами, успешно ими выполняются.

Работы советских гидравликов, как и всех советских ученых, руководимых Коммунистической партией и Советским правительством и вооруженных марксистско-ленинским мировоззрением, направлены на дальнейшее развитие народного хозяйства, на неуклонное улучшение жизни советского народа.

Успехи советских гидравликов будут способствовать более быстрому осуществлению великой и благородной цели советского народа — построению коммунизма в нашей стране.

Глава вторая

ГЛАВНЕЙШИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В НИХ

2-1. Капельные жидкости и газы

Жидкостью называется физическое тело, обладающее текучестью и не имеющее своей формы, но принимающее форму сосуда, в котором оно находится. Текучестью называется способность жидкости изменять свою форму, не дробясь на части, под действием даже небольших сил.

Жидкости делятся на два класса: на капельные и газы. К капельным жидкостям относятся вода, масло, бензин и т. п. Эти жидкости способны образовывать капли; они имеют собственный объем и по сравнению с газами мало сжимаемы. Капельная жидкость, если ее объем меньше объема сосуда, всегда занимает часть его. В этом случае она имеет поверхность раздела капель-

ной жидкости с газом, называемую свободной поверхностью. Газ распространяется по всему объему сосуда [1].

Жидкость называют идеальной в тех случаях, когда при исследовании пренебрегают теми или другими, важными для исследуемого вопроса, ее физическими свойствами. В дальнейшем будем называть жидкость идеальной, если пренебрежем ее вязкостью.

В гидравлике жидкость рассматривается как среда, непрерывным образом заполняющая некоторое пространство, т. е. как континуум, вследствие чего ее любой бесконечно малый объем рассматривается как физическое тело [2].

Принимая жидкость за континуум, вместе с тем надо отличать жидкости однородные, т. е. с одинаковым распределением массы по объему, от неоднородных жидкостей, т. е. жидкостей с неодинаковым распределением массы по объему. Примером неоднородной жидкости может служить любой газ, хотя при малых изменениях давления практически возможно и его рассматривать как однородную жидкость [3].

Распределение массы жидкости по объему характеризуется плотностью или объемным весом (см. § 2-3).

2-2. Силы, действующие в жидкости

При выводе различных гидравлических зависимостей приходится составлять уравнения движения или покоя жидкости и

[1] Согласно современным воззрениям в капельной жидкости существует решетчатое расположение ее молекул, но в отличие от кристаллической решетки твердого тела решетка капельной жидкости не имеет правильной формы. В своем тепловом движении молекулы капельной жидкости под влиянием действующих между ними сил большую часть времени совершают дрожания около некоторых положений равновесия (находятся в состоянии «оседлой жизни») и этим напоминают колебания молекул твердого тела. Время оседлой жизни молекулы равно 10^{-10} сек. За это время молекула успевает совершить от 100 до 10 000 колебаний. Некоторым молекулам удается случайно набрать энергию и вырваться из своего окружения, пересесть в другое место. На новом месте молекула снова приходит в движение, имеющее характер дрожаний. Траектория, описываемая молекулой при ее неоднократном пересеслении, представляет ломаную линию, напоминающую траекторию молекулы газа в ее тепловом движении.

Течение жидкости возникает только при действии на жидкость внешних сил. Однако время действия этих сил должно быть больше времени оседлой жизни. В противном случае жидкость придет в напряженное состояние, аналогичное твердому телу.

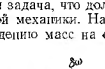
[2] Это возможно благодаря тому, что размеры рассматриваемых в гидравлике частиц жидкости всегда велики по сравнению со средней длиной свободного пробега молекулы жидкости.

[3] В теоретической гидромеханике жидкость называется однородной, если во всем ее объеме она удовлетворяет одному и тому же уравнению состояния. С этой точки зрения один и тот же газ всегда будет представлять однородную жидкость.

включать в эти уравнения различные силы, действующие на рассматриваемые элементы жидкости и являющиеся по отношению к ним внешними силами. Эти силы делятся на силы массовые и силы поверхностные.

Массовыми называются силы, величина которых пропорциональна массе жидкости. К массовым силам относятся сила тяжести и силы инерции (Даламбера, переносная, Кориолиса). Каждая из этих сил инерции вводится в рассмотрение в зависимости от того, каким методом решается та или иная задача, что должно быть хорошо известно из курса теоретической механики. Напомним лишь, что силы инерции равны произведению масс на соответствующие ускорения и направлены в сторону, им противоположную.

В однородной жидкости сила тяжести и силы инерции оказываются пропорциональными объемам и именуются в этом частном случае объемными силами.



Фиг. 2-1. Схема разложения поверхностной силы на силу трения и силу давления.

Поверхностными называются силы, величина которых пропорциональна площади той поверхности, на которую эти силы действуют. Рассмотрим их.

Для этого выделим в потоке жидкости (фиг. 2-1) некоторый объем, ограниченный произвольной поверхностью. На поверхность рассматриваемого объема со стороны окружающей его жидкости или со стороны соприкасающихся с объемом стенок канала или сосуда действуют силы. По отношению к рассматриваемому объему эти поверхностные силы являются внешними.

Обозначим через δR поверхностную силу, с которой окружающая жидкость или стенка действует на элементарную площадку $\delta\omega$ указанной поверхности. Сила δR в общем случае может быть направлена как внутрь рассматриваемого объема под углом α к направлению нормали n, так и вовне.

Разложим силу δR на две составляющие: на δP по направлению, совпадающему с нормалью n, и δT — по направлению касательной к площадке.

Силу δP назовем нормальной силой. Она может быть сжимающей силой — силой давления или растягивающей — силой растяжения. Силу δT назовем касательной силой или силой трения.

Силы трения обусловливаются деформацией жидкого объема и возникают только в движущейся жидкости. Силам трения будут посвящены отдельные параграфы. Здесь рассмотрим подробнее нормальные силы. Эти силы характеризуются нормальным напряжением в данной точке. Величина среднего

нормального напряжения на данной элементарной площадке равна отношению δP к $\delta\omega$:

$$p_{ср\,n} = \frac{\delta P}{\delta\omega}\ [кГ/м^2]^{*}. \qquad (2\text{-}1)$$

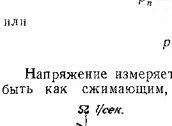
Абсолютным напряжением в точке в направлении n называется предел, к которому стремится среднее нормальное напряжение, соответствующее площадке $\delta\omega$ с нормалью n, когда величина площадки стремится к нулю:

$$p_n = \lim p_{ср\,n} = \lim_{\delta\omega\to 0} \frac{\delta P}{\delta\omega}, \qquad (2\text{-}2)$$

или

$$p_n = \frac{dP}{d\omega}\ [кГ/м^2]. \qquad (2\text{-}3)$$

Напряжение измеряется в $кГ/м^2$ и т. п. Напряжение может быть как сжимающим, т. е. давлением, так и растягивающим.



Фиг. 2-2. Жидкость не выбрасывается из вращающегося капилляра вследствие способности воспринимать растягивающие усилия

Способность жидкости воспринимать сжимающие усилия (давления) ничем не ограничена. Этого нельзя сказать о растягивающих усилиях. Газы вообще не способны их воспринимать. Капельные же жидкости, как доказано современными исследованиями, обладают способностью воспринимать достаточно большие растягивающие усилия.

Особенно наглядно это можно наблюдать на следующем примере. Открытый с обоих концов стеклянный капиллар (фиг. 2-2) заполняется жидкостью и приводится во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Благодаря вращению в жидкости возникает стремление быть выброшенной в обе стороны из капилляра. Однако даже при большой угловой скорости вращения Ω жидкость не выбрасывается, что свидетельствует о ее способности воспринимать возникающие при этом растягивающие усилия. При подобных опытах удавалось достигнуть, например, в воде растягивающих напряжений до 280 $кГ/см^2$. Таким образом, капельная жидкость обладает прочностью на разрыв и в этом отношении похожа на твердое тело.

Однако в практических условиях благодаря загрязнению жидкости и наличию в жидкости растворенного воздуха сопротивляемость ее растягивающим усилиям незначительна. В гидравлических расчетах считают, что предел прочности капельной жидкости наступает при падении давления в жидкости до значений $p_п$, при котором начинается парообразование. Давление парообразования $p_п$ всегда больше нуля и принимается как наименьшее давление в жидкостях. В тех зонах потока, где давление падает до $p_п$, возникает особое состояние жидкости, сопровождаемое местным образованием пузырьков в жидкости, заполненных парами жидкости и воздухом, и называемое кавитацией.

Давление насыщенных паров $p_п$ для химически простой, однокомпонентной жидкости зависит только от рода жидкости и её температуры. Для сложных жидкостей давление зависит еще и от соотношения объемов паровой $W_п$ и жидкой $W_ж$ фазы[1].

Например, согласно ГОСТ 1756-52 давление парообразования топлив поршневых двигателей определяется при $t = 38°$ С и $\frac{W_п}{W_ж} = \frac{4}{1}$. Некоторые средние значения $p_п$ для различных топлив, соответствующие этим условиям, приведены в табл. 2-1. Однако условия гидравлического расчета, чаще всего не соответствуют этим условиям. Для других условий проф А. С. Ирисов рекомендует формулу, предложенную Н. И. Тихоновым

$$p_п = p_4 \cdot \left(\frac{14}{10 + \frac{W_п}{W_ж}}\right)^{0,31} \cdot 10^{4,026 - \frac{1\,252}{273 + t°C}}, \qquad (2\text{-}4)$$

где p_4 соответствует $\frac{W_п}{W_ж} = 4$ и $t = 38°$ С.

Для воды в гидравлических расчетах принято принимать давления парообразования согласно данным табл. 2-2.

Таблица 2-1

Значения давления насыщенных паров моторных топлив, соответствующие четырехкратному отношению паровой фазы к жидкой при температуре $t = 38°$ С

Сорт топлива	Температура, соответствующая выкипанию 10% фракций, °С	Давление насыщенных паров, $кГ/см^2$	По данным
Авиабензины . .	65—85	0,336—0,211	А. С. Ирисова
Автобензины . .	60—80	0,506—0,274	Бриджмена
Керосин	180—200	0,049—0,038	Н. И. Тихонова

В движущейся жидкости абсолютное давление в точке называется гидродинамическим, а в покоящейся жидкости — гидро-

* Отметим здесь (для исключения повторений в дальнейшем), что при определении размерных величин всегда будет указываться их размерность для того, чтобы только подчеркнуть их физический смысл в одной какой-либо системе единиц.

Таблица 2-2

Давление насыщенного водяного пара в зависимости от температуры

Температура пара, °С	6,6	12,7	17,1	20,7	23,7	28,6	35,8	45,4	53,6
Давление пара, кГ/см²	0,01	0,015	0,020	0,025	0,030	0,040	0,060	0,100	0,150
Температура пара, °С	64,6	75,4	85,5	99,1	119,6	132,9	142,9	151,1	158,1
Давление пара, кГ/см²	0,250	0,400	0,600	1,000	2	3	4	5	6
Температура пара, °С	169,6	179	197,4	211,4	222,9	232,8	241,4	249,2	
Давление пара, кГ/см²	8	10	15	20	25	30	35	40	

статическим. В дальнейшем гидродинамическое и гидростатическое давления в точке будем называть просто давлением. Кроме абсолютного давления, в гидравлических исследованиях приходится иметь дело с понятиями избыточного давления и вакуума.

Избыточным давлением называется избыток давления над атмосферным, который определяется как разность между абсолютным давлением, если оно больше атмосферного, и атмосферным:

$$p_u = p_{ab} - p_{atm}. \qquad (2\text{-}5)$$

Это давление называют также манометрическим.

Вакуумом, или разрежением, называется недостаток давления до атмосферного, который определяется как разность между

Таблица 2-3

Значение нормального атмосферного давления в зависимости от высоты над уровнем моря

Высота над уровнем моря, м	0	100	200	250	300	500	600	700	800	1 000	1 200	1 500	2 000
Нормальное давление, кГ/см²	10 330	10 200	10 100	10 000	9 900	9 700	9 600	9 500	9 400	9 200	8 900	8 600	8 100
Высота водяного столба (при t=4° С), м	10,33	10,2	10,1	10	9,9	9,7	9,6	9,5	9,4	9,2	8,9	8,6	8,1
Высота ртутного столба (при t=0° С), мм	760	751	742	735,7	733	716	707	699	690	674	658	635	598

атмосферным давлением и абсолютным, если последнее меньше атмосферного:

$$p_a = p_{atm} - p_{ab}. \qquad (2\text{-}6)$$

Давление $p = 1{,}033$ кГ/см², равное одной физической атмосфере, соответствует нормальному атмосферному давлению на уровне моря. Величина атмосферного давления зависит от высоты места над уровнем моря и от состояния атмосферы. Значения атмосферного давления в зависимости от высоты места над уровнем моря (соответствующие нормальному атмосферному давлению на уровне моря) приведены в табл. 2-3, а также в табл. 26-1.

2-3. Плотность и объемный вес жидкости

Плотностью жидкого тела ρ *в данной точке называется предельное значение отношения массы элементарного тела* δM [кГ сек²/м] *к его объему* δW [м³] *при стремлении* δW *к точке (к нулю):*

$$\rho = \lim_{\delta W \to 0} \frac{\delta M}{\delta W} = \frac{dM}{dW} \; [\text{кГ сек}^2/\text{м}^4]. \qquad (2\text{-}7)$$

Предельное значение отношения веса δG элементарного тела к его объему называется объемным весом γ:

$$\gamma = \frac{dG}{dW} \; [\text{кГ/м}^3]. \qquad (2\text{-}8)$$

Объемный вес и плотность связаны зависимостью

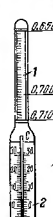
$$\gamma = \rho g, \qquad (2\text{-}9)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Для однородного жидкого тела плотность и объемный вес имеют одно и то же значение, не зависящее от величины объема, равное отношению массы всего тела M или веса G к его объему W, т. е. определяются по формулам:

$$\rho = \frac{M}{W}, \qquad (2\text{-}10)$$

$$\gamma = \frac{G}{W}. \qquad (2\text{-}11)$$



Фиг. 2-3. Нефтеденсиметр.
1— ареометрическая шкала
2—термометр

Наиболее просто объемный вес γ [Г/см³] (Г-грамм-сила) и плотность ρ [г/см³] (г-грамм-масса) определяются при помощи ареометра. На фиг. 2-3 показан ареометр для нефтяных продуктов (ГОСТ 1289-41), называемый нефтеденсиметром.

В табл. 2-4 приведены значения объемных весов некоторых однородных жидких тел (см. также табл. 2-7). Для сопоставления в этой же таблице приведены значения объемного веса (для условий на уровне моря) для воздуха и ориентировочные значения γ для продуктов горения среднего состава.

Таблица 2-4

Объемные веса некоторых жидких тел

Наименование жидкостей	γ, кГ/м³	t, °C
Вода дистиллированная	1 000	4
Вода морская	1 020—1 030	15
Бензины:		
Автомобильный крекинг	755	15
КБ 70	745	15
Нефть бакинская	790—950	15
Керосин	760	15
Воздух	1,293	0
Воздух	1,183	20
Чугун расплавленный	7 000	1 200
Продукты горения среднего состава	1,25—0,0027 $t°$	t

Объемный вес и плотность жидкостей зависят от температуры. Температурное изменение объема характеризуется коэффициентом объемного расширения β_p, который равен относительному изменению объема W при изменении температуры t на 1° С и определяется по формуле

$$\beta_p = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}\left[\frac{1}{°C}\right]. \qquad (2\text{-}12)$$

Для определения плотности ρ или объемного веса жидкости γ при температуре t С, можно пользоваться следующими формулами для ртути

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + 0{,}0001815 \cdot t} \qquad (2\text{-}13)$$

где $\gamma_0 = 13\,595$ кГ/м³ — объемный вес ртути при $t = 0°$ С. Для нефти и нефтепродуктов применяется формула Д. И. Менделеева

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_p(t - t_0)}, \qquad (2\text{-}14)$$

где ρ_0 — плотность при температуре t_0.

Формулу Менделеева можно представить и в другом виде.

$$\rho = \rho_0 - \beta(t - t_0), \qquad (2\text{-}15)$$

где

$$\beta = \beta_p \cdot \rho. \qquad (2\text{-}16)$$

Коэффициент β будем называть температурной поправкой. Значения β, соответствующие плотности ρ при искомой температуре t, приведены в табл. 2-5. При пользовании табл. 2-5 плотность ρ_0 должна соответствовать температуре $t_0 = 20°$ С и размерности $г/см^3$.

Таблица 2-5

Средние значения температурных поправок плотности нефтепродуктов[1]

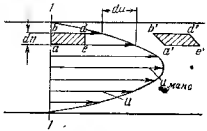
Плотность ρ при температуре $t°$	Температурная поправка β	Плотность ρ при температуре $t°$	Температурная поправка β	Плотность ρ при температуре $t°$	Температурная поправка β
0,6900—0,6999	0,000910	0,8000—0,8099	0,000765	0,9000—0,9099	0,000633
0,7000—0,7099	0,000897	0,8100—0,8199	0,000752	0,9100—0,9199	0,000620
0,7100—0,7199	0,000884	0,8200—0,8299	0,000738	0,9200—0,9299	0,000607
0,7200—0,7299	0,000870	0,8300—0,8399	0,000725	0,9300—0,9399	0,000594
0,7300—0,7399	0,000857	0,8400—0,8499	0,000712	0,9400—0,9499	0,000581
0,7400—0,7499	0,000844	0,8500—0,8599	0,000699	0,9500—0,9599	0,000567
0,7500—0,7599	0,000831	0,8600—0,8699	0,000686	0,9600—0,9699	0,000554
0,7600—0,7699	0,000818	0,8700—0,8799	0,000673	0,9700—0,9799	0,000541
0,7700—0,7799	0,000805	0,8800—0,8899	0,000660	0,9800—0,9899	0,000528
0,7800—0,7899	0,000792	0,8900—0,8999	0,000647	0,9900—0,9999	0,000517
0,7900—0,7999	0,000778				

2-4. Вязкость жидкостей. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости

Физика рассматривает два рода вязкости жидкости: объемную и тангенциальную.

Объемная вязкость характеризует способность жидкости воспринимать сжимающие и растягивающие усилия. Благодаря объемной вязкости всегда существует сдвиг фаз между давлением, оказываемым на жидкость, и объемной деформацией, которую создает это давление.

Тангенциальная вязкость, о которой будет идти речь, *характеризует способность жидкостей воспринимать касательные усилия (силы трения)*.



Фиг. 2-4. В ламинарном потоке прямоугольник деформируется в параллелограмм

Рассмотрим движение жидкости, при котором скорости отдельных ее частиц параллельны оси трубы (фиг. 2-4). Опыт показывает, что такое движение жидкости в природе существует (оно называется ламинарным движением и в дальнейшем будет подробно изучено). Скорости u частиц, расположенных в некотором поперечном сечении трубы 1—1, отличаются друг от друга.

Скорость жидкости у стенки равна нулю и возрастает по направлению к оси трубы, достигая на оси наибольшего значения $u_{макс}$. Поток жидкости может быть представлен как движение отдельных бесконечно тонких цилиндрических слоев жидкости,

[1] Таблица составлена проф. М. М. Кусаковым.

перемещающихся с различными скоростями, увеличивающимися к оси трубы.

Вследствие молекулярного движения молекулы жидкости пересекают слои жидкости, движущиеся по отношению друг к другу с относительной скоростью, благодаря чему на поверхности соприкасающихся слоев жидкости возникают силы трения. При этом слои жидкости, движущиеся быстрее, увлекают за собой слои жидкости, движущиеся медленнее, и, наоборот, слои жидкости, движущиеся медленнее, тормозят движение слоев, движущихся быстрее. В таком движении частица жидкости в виде прямоугольника $abde$ деформируется в параллелограмм $a'b'd'e'$. Деформация объема является обязательным условием возникновения сил трения.

Благодаря деформации происходит скашивание прежде прямого угла bae прямоугольника с угловой скоростью скашивания, равной:

$$\Omega_{ск} = \frac{du}{dn} \; [1/сек] \tag{2-17}$$

Эта величина называется градиентом скорости.

Сила трения T между слоями жидкости пропорциональна площади соприкосновения S и угловой скорости скашивания угла $\frac{du}{dn}$

$$T = \mu S \frac{du}{dn}. \tag{2-18}$$

Формула (2-18) является выражением закона Ньютона о трении в жидкостях

Напряжение этой силы $\tau = \frac{T}{S}$ равно

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dn},$$

где μ — так называемый динамический коэффициент вязкости жидкости, имеющий размерность $кГ\,сек/м^2$ или $г/см\,сек$.

Будем считать τ величиной всегда положительной. Поэтому в зависимости от знака $\frac{du}{dn}$ формулу для τ представим в виде:

$$\tau = \pm \mu \cdot \frac{du}{dn}, \tag{2-19}$$

где „+" будет соответствовать положительному значению $\frac{du}{dn}$, а „—" — отрицательному, знак $\frac{du}{dn}$ зависит от закона изменения скорости по сечению потока и выбора направления изменения скорости[1]

Кроме динамического коэффициента вязкости μ, в гидравлике применяется кинематический коэффициент вязкости ν, который равен отношению динамического коэффициента вязкости к плотности ρ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \; [м^2/сек] \tag{2-20}$$

В системе CGS за единицу измерения динамического коэффициента вязкости принимают пуаз, имеющий размерность $г/см \cdot сек$, названный так в честь французского ученого Пуазейля.

Пуаз соответствует такой вязкости, при которой в прямолинейно движущейся жидкости при градиенте скорости $\frac{du}{dn} = 1\ 1/сек$ на поверхности соприкасающихся слоев жидкости развивается сила трения в 1 дин/см².

Кинематический коэффициент вязкости в системе CGS измеряется в $см^2/сек$ — в стоксах (в честь английского ученого Стокса).

Учитывая, что $1\ кГ = 981\,000$ дин, а $1\ м^2 = 10\,000\ см^2$, легко установить связь между числами, выражающими вязкость в технической и физической системах единиц

$$\mu \left(\frac{дин \cdot сек}{см^2}\right) = 98{,}1 \left(\mu \frac{кГ \cdot сек}{м^2}\right) \tag{2-21}$$

$$\nu\ (см^2/сек) = 10\,000\ (\nu\ м^2/сек) \tag{2-22}$$

[1] Согласно современным исследованиям (Я. И. Френкель, Введение в теорию металла, 1955) для капельной жидкости

$$\mu = \frac{2t_0 k}{\delta^3} e^{\frac{U}{kT}},$$

где k — постоянная Больцмана,
T — абсолютная температура,
δ — расстояние между молекулами;
t_0 — период колебания молекулы (см. сноску на стр. 14),
U — энергия, которую должна затратить молекула для того, чтобы вырваться из окружения.

Для газов согласно кинетической теории газа

$$\mu = (0{,}31 \div 0{,}49)\, \rho u_м l,$$

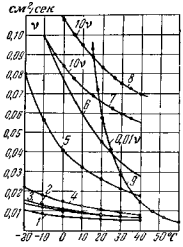
где 0,31 ÷ 0,49 коэффициенты, принимаемые в зависимости от закона распределения скоростей и характера удара молекул газа в их тепловом движении;
$u_м$ — средняя скорость молекулярного движения,
l — длина свободного пробега молекулы между двумя столкновениями.

Заметим, что в отличие от капельных жидкостей вязкость газов не зависит от давления, так как от давления не зависит произведение ρl.

Заметим, что имеются жидкие тела, силы трения в которых не подчиняются формуле (2-18). Такие жидкости называются аномальными. К ним относятся некоторые масла при отрицательных температурах, парафинистые нефтепродукты при низких температурах, а также коллоиды[1]. Для аномальных жидкостей τ определяется по формуле

$$\tau = \tau_a + \mu \cdot \frac{du}{dn}. \qquad (2\text{-}23)$$

В этой формуле τ_a — предельное значение напряжения силы трения, лишь после достижения которого аномальная жидкость приходит в движение с соответствующим градиентом скорости $\frac{du}{dn}$. Таким образом, в аномальных жидкостях силы трения могут возникать и в покоящейся жидкости.



Фиг. 2-5. Зависимость кинематического коэффициента вязкости от температуры

1 — авиабензин парафинистый, 2 — авиабензин бакинский, 3 — бензин крекинг, 4 — бакинский лигроин, 5 — бакинский керосин, тракторный, 6 — газойль, 7 — автомобильный крекинг бензин, 8 — бензин КБ-70, 9 — дизельное масло.

Давление и температура оказывают существенное влияние на вязкость жидкости. Впервые совместное влияние на вязкость давления и температуры было установлено еще в 1912 г. профессором Московского университета А. И. Бачинским (1877—1944 гг.). Позже этим вопросом занимались многие ученые. Эти исследования показали, что как температура (фиг. 2-5), так и давление (фиг. 2-6) оказывают большое влияние на значение вязкости. Это влияние проявляется различно. Влияние температуры особенно сильно сказывается в области низких температур, а влияние давления — в области высоких давлений. Например, при $p = 3\,400$ $кГ/см^2$ и $t = 20°$ С динамический коэффициент вязкости трансформаторного масла почти в 6 500 раз больше динамического коэффициента вязкости, (см. табл. 2-7) при той же температуре, но при $p = 1$ $кГ/см^2$. В области невысоких давлений, встречающихся при перекачке жидкостей ($p < 100$ $кГ/см^2$), влияние давлений на вязкость значительно меньше. Например для того же трансформаторного масла

при $t = 20°$ С

$\mu = 0{,}275$ пуаза при $p = 1$ $кГ/см^2$;

$\mu = 0{,}296$ пуаза при $p = 100$ $кГ/см^2$,

т. е. увеличивается только на 10%.

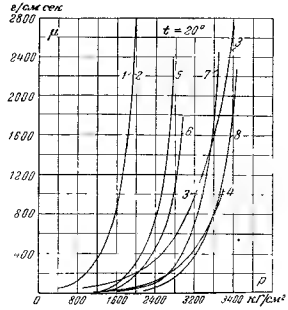
Таким образом, вязкость капельной жидкости увеличивается с увеличением давления. Исключение представляет лишь вода, у которой при $t = 24°$ С вязкость несколько уменьшается с увеличением давления. Зависимость вязкости от давления может быть представлена в виде

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\beta_n \cdot p} \qquad (2\text{-}24)$$

где β_n — пьезокоэффициент, $м^2/кГ$;

μ_0 — динамический коэффициент вязкости при давлении $p_u = 0$.

[1] Коллоидами называются вещества, которые не кристаллизуются и не проходят через перепонки растительного и животного происхождения (например, белок, крахмал, клей).



Фиг. 2-6. Зависимость динамического коэффициента вязкости масел от давления при постоянной температуре $t = 20°$ С

1 и 2 — масло МС повышенной и нормальной вязкости, 3 — касторовое, 4 — синтетическое, 5 — вазелиновое, 6 — турбинное, 7 — веретенное, 8 — трансформаторное.

Экспериментальные исследования показывают, что значение β_n зависит главным образом от физических особенностей жидкости и ее температуры, а также, хотя и в меньшей степени, от диапазона изменения давления. Для некоторых масел среднее значение β_n приведено в табл. 2-6. Вязкость газов от давления не зависит (см. сноску на стр. 23).

Таблица 2-6

Значение пьезокоэффициента β_n [$см^2/кГ$] для некоторых масел в зависимости от температуры

Сорт масла	11° С	20° С	30° С
Вазелиновое	—	0,00268	0,00237
Грозненское МС повышенной вязкости	0,00284	0,00265	0,00240
Грозненское МС нормальной вязкости	0,00294	0,00277	0,00255
Глицерин	—	0,00055	0,00055
Турбинное Л	0,00269	0,00257	0,00255
Веретенное АУ	0,00248	0,00242	0,00241
Касторовое	0,0154	0,0150	0,0143
Синтетическое № 1	—	0,00142	0,00159 0,00132 ($1\,000 < p < 4\,000$)

Для определения вязкости при разных температурах пользуются эмпирическими формулами или графиками. Так, вязкость воды в зависимости от температуры определяется по формуле Пуазейля

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}01775}{1+0{,}1337\cdot t+0{,}000221\cdot t^2}\ [см^2\ сек], \qquad (2\text{-}25)$$

Зависимость ν для воды на основании опытных данных показана на фиг. 2-7.

Зависимость кинематического коэффициента вязкости нефтепродуктов в сантистоксах ($мм^2\ сек$) от температуры достаточно хорошо выражается формулой

$$\lg(\nu+0{,}8) = \frac{A}{(273+t^\circ\ C)^B}, \qquad (2\text{-}26)$$

где коэффициент A характеризует отдельные сорта нефтепродукта, а показатель степени B иногда и целую группу нефтепродуктов. В системе координат, в которой по оси ординат откладывается $\lg[\lg(\nu+0{,}8)]$, а по оси абсцисс — $\lg(273+t^\circ\ C)$, эта зависимость изображается в виде прямой линии (фиг. 2-8).

Для удобства пользования графиком вместо значений логарифмов ($\lg\lg$ и $\lg$) на осях координат указаны соответствующие этим логарифмам значения ν и t.

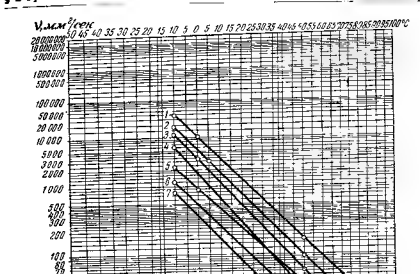
Для построения зависимости достаточно знать коэффициент вязкости только при двух значениях температуры. В табл. 2-7 приведены значения коэффициентов вязкости по данным проф. М. П. Воларовича.

Фиг. 2-7. Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды и воздуха от температуры

Вязкость газов в отличие от вязкости капельных жидкостей увеличивается вместе с увеличением температуры. Это следует (см сноску на стр. 23) из того, что с увеличением температуры увеличивается как скорость молекул u_0 (которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры T), так и длина свободного пробега молекулы l. Для воздуха зависимость ν от температуры показана на фиг. 2-7.

Коэффициенты вязкости определяются опытным путем при помощи вискозиметров. Эти весьма разнообразные по своему устройству приборы по принципу действия могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся приборы, позволяющие определить относительное значение вязкости, т. е. отношение коэффициента вязкости испытуемой жидкости к известному коэффициенту вязкости эталонной жидкости, вискозиметр по ГОСТ 1532-42 (фиг. 2-9), капиллярный по ГОСТ 33-40 (фиг. 2-10) и т. п. К второй группе относятся приборы, которые позволяют определить значения коэффициента вязкости безотносительно к эталонной жидкости, основанные на исследовании падения шариков, цилиндров, колеблющихся или вращательных движений цилиндров и дисков в испытуемых жидкостях. Наиболее широкое распространение получили приборы первой группы.

Первый вискозиметр был создан в 1751 г. М. В. Ломоносовым и назывался „инструментом для исследования вязкости жидких материй по числу капель", вытекавших под постоянным давлением из капиллярной трубки.



Фиг. 2-8. Зависимость кинематического коэффициента вязкости различных масел от температуры.

1 — МС 20, 2 — МС 14, 3 — автол 10 дистиллятный, 4 — автол 6 дистиллятный, 5 — веретенное 2, 6 — загущенное до вязкости автола 10, 7 — веретенное 3, 8 — загущенное до вязкости автола 6

Вискозиметр по ГОСТ 1532-42 применяется для определения коэффициентов вязкости жидкости, более вязкой, чем вода. Вязкость в условных градусах Е° определяется по формуле

$$E^\circ = \frac{t_1}{t_2}, \qquad (2\text{-}27)$$

где t_1 — время истечения 200 $см^3$ испытуемой жидкости при заданной температуре, а t_2 — время истечения 200 $см^3$ дистиллированной воды при температуре 20° С. Градусы Е° можно пересчитать в кинематический коэффициент вязкости по формуле Фогеля

$$\nu = 0{,}01\cdot E^\circ - 7{,}6\left(1-\frac{1}{E^\circ}\right)\ [см^2\ сек], \qquad (2\text{-}28)$$

Таблица 2-7

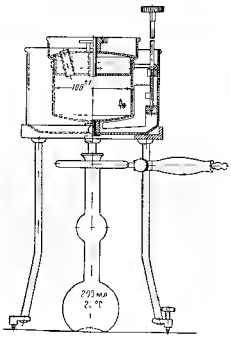
Значения плотности или объемного веса и вязкости различных масел при атмосферном давлении по данным проф. М. П. Воларовича

Сорт масла	ρ г/см³ = γ Г/см³			ν пуазы		
	14° С	20° С	30° С	14° С	20° С	30° С
Грозненское МС повышенной вязкости	0,895	0,892	0,885	21,8	12,9	6,02
Грозненское МС нормальной вязкости	0,898	0,894	0,888	18	10,5	4,73
Турбинное Л	0,897	0,894	0,888	1,26	0,860	0,462
Веретенное АУ	0,893	0,889	0,882	0,607	0,432	0,249
Трансформаторное	0,882	0,887	0,870	0,376	0,275	0,171
Касторовое	0,966	0,960	0,954	17,6	10,43	4,79
Вазелиновое	—	0,878	0,874	—	1,38	0,733
Масло синтетическое № 1 силикон		0,973	0,65	—	5,2	4,17
Глицерин	—	1,249	1,242	—	5,12	2,39

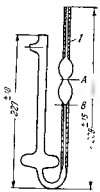
Вискозиметр по ГОСТ 33-40 (Оствальда-Пинкевича) применяется для определения кинематического коэффициента вязкости жидкостей, менее вязких чем вода. Вискозиметр представляет собой стеклянную U-образную трубку, в правое колено которой впаян капилляр I. Кинематический коэффициент вязкости определяется по формуле

$$\nu = kt, \qquad (2\text{-}29)$$

где k — постоянная вискозиметра, зависящая главным образом от стандартной эталонной жидкости, по которой прибор градуировался, а также и от размеров капилляра (для градуировки вискозиметра,



Фиг. 2-9 Вискозиметр для определения условной вязкости.



Фиг. 2-10 Капиллярный вискозиметр Оствальда-Пинкевича

предназначенного для определения вязкости, например моторных топлив, берется дважды дистиллированная вода, а t — время истечения испытуемой жидкости в объеме, заключенном между отметками A и B.

2-5. Упругость капельных жидкостей

Упругость капельных жидкостей характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_c, который равен относительному изменению объема W при изменении давления p на 1 $кГ/м^2$ и определяется по формуле

$$\beta_c = -\frac{1}{W}\cdot\frac{dW}{dp}\ [м^2/кГ]. \qquad (2\text{-}30)$$

Коэффициент объемного сжатия β_c можно также считать равным относительному изменению плотности ρ при изменении давления на 1 $кГ/м^2$ и определять по формуле

$$\beta_c = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{dp}. \qquad (2\text{-}31)$$

Легко проверить, воспользовавшись формулой (2-10), тождественность формул (2-30) и (2-31).

Величина K, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем объемной упругости

$$K = \frac{1}{\beta_c}\ [кГ/м^2]. \qquad (2\text{-}32)$$

Зависимость модуля объемной упругости K от давления, выраженного в $кГ/см^2$, и температуры приближенно можно выразить формулой:

$$K = \mathrm{K}(p + p_*)\ [кГ/см^2], \qquad (2\text{-}33)$$

где параметр p_* зависит от температуры, а коэффициент K для разных жидкостей изменяется в пределах от K = 6,5 для воды до K = 10,5 для ртути. Для воды p_* в зависимости от температуры изменяется согласно табл. 2-8.

Для воды среднее значение модуля упругости $K = 20\,000$ $кГ/см^2$, для керосина $K = 17\,200$ $кГ/см^2$, для дизельного топлива $K = 16\,000$ $кГ/см^2$, для других нефтепродуктов $K = 13\,500$ $кГ/см^2$.

Таблица 2-8

Значения параметра p_* для воды в формуле для модуля объемной упругости K в зависимости от температуры

t, °С	p_*, $кГ/см^2$	t, °С	p_*, $кГ/см^2$	t, °С	p_*, $кГ/см^2$
0	2 950	20	3 260	60	3 360
5	3 080	30	3 290	80	3 290
10	3 140	40	3 420	100	3 140
15	3 220	50	3 400	200	1 770

2-6. Упругость газов. Закон Клапейрона-Менделеева

В отличие от капельных жидкостей газы способны сильно сжиматься. При изменении объема газа, в общем случае, изменяются его давление и температура. Для совершенных газов, к которым применимы законы Бойля и Мариотта, зависимость между давлением и объемом определяется основным характеристическим уравнением их состояния — законом Клапейрона-Менделеева [1]:

$$pW = GRT; \tag{2-34}$$

$$\frac{p}{\gamma} = RT, \tag{2-35}$$

где p — давление, $кГ/м^2$;
W — объем, $м^3$;
G — вес, $кГ$;
γ — объемный вес, $кГ/м^3$,
$T = 273° + t°C$ — абсолютная температура,
R — постоянная газа (для воздуха $R = 29{,}27$ м/°С)

В политропическом процессе

$$\frac{p}{\gamma^n} = \text{const}, \tag{2-36}$$

где n — показатель политропы

В изотермическом процессе

$$\frac{p}{\gamma} = \text{const}. \tag{2-37}$$

Исследования показывают, что формула (2-37) с точностью, достаточной для целей практики, справедлива только для давлений, меньших 100 $кГ/см^2$. При больших давлениях имеет место значительное отступление от этого закона. Например, для воздуха при давлении 100 $кГ/см^2$ ошибка в определении объемного веса достигает почти 3% (в сторону его увеличения), а при 1 000 $кГ/см^2$ почти 200% (в сторону уменьшения). Следует также иметь в виду, что закон Клапейрона-Менделеева нельзя экстраполировать на слишком низкие температуры

2-7. Поверхностное натяжение и капиллярность

Поверхностное натяжение обусловливается силами взаимного притяжения молекул поверхностного слоя, стремящимся сократить свободную поверхность жидкости.

Благодаря действию сил поверхностного натяжения жидкость, имеющая криволинейную свободную поверхность, испытывает дополнительное усилие, увеличивающее или уменьшающее давление в жидкости на величину

$$\delta p_{пов} = \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{2-38}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, $кГ/м$. Значения σ приведены в табл. 29;

[1] Клапейрон — профессор Петербургского института путей сообщения — в 1834 г. доказал частный случай этого закона. Общий случай был указан Менделеевым в 1874 г. и опубликован в 1875 г.

r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны рассматриваемого элемента поверхности

Таблица 29

Значения коэффициента поверхностного натяжения σ на границе с воздухом при нормальном атмосферном давлении 760 мм рт. ст.

Наименование жидкости	Температура, °С	σ кГ/м
Вода	20	0,0074
Бензины разные	10÷40	0,00247÷0,00194
Керосин тракторный	10÷40	0,00279÷0,00257
Дизельное топливо	10÷40	0,00296÷0,00269

Увеличение давления происходит в тех случаях, когда поверхность жидкости выпукла, а уменьшение — поверхность жидкости вогнута. Благодаря изменению давления, вызываемому поверхностным натяжением, возникает явление капиллярности. *Капиллярностью называется свойство жидкости подниматься или опускаться в трубках малого диаметра под действием дополнительного давления, вызванного силами поверхностного натяжения.*

Подъем жидкости происходит в трубке, поверхность которой смачивается жидкостью (например, вода — стекло), опускание — в трубке, поверхность которой жидкостью не смачивается (например, ртуть — стекло).

В стеклянной трубке диаметром d мм вода при температуре 20° С поднимается дополнительно на высоту h

$$h = \frac{29{,}8}{d} [мм]. \tag{2-39}$$

В такой же трубке ртуть опускается на высоту

$$h = \frac{10{,}15}{d} [мм]. \tag{2-40}$$

Влияние капиллярности приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления в некоторых случаях истечения жидкости из отверстий, а также в специальных вопросах гидравлики, например в вопросах фильтрации и др.

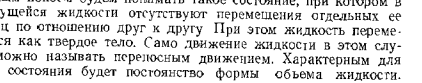
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГИДРОСТАТИКА

Глава третья

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОСТАТИКУ

В гидростатике рассматривается жидкость, находящаяся в общем случае в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем будем понимать такое состояние, при котором в движущейся жидкости отсутствуют перемещения отдельных ее частиц по отношению друг к другу. При этом жидкость перемещается как твердое тело. Само движение жидкости в этом случае можно называть переносным движением. Характерным для этого состояния будет постоянство формы объема жидкости.



Фиг. 3-1. Жидкость в резервуаре находится в „абсолютном покое".

Фиг. 3-2. Жидкость в цистерне находится в относительном покое.

Фиг. 3-3. Жидкость во вращающемся резервуаре находится в относительном покое.

Частным случаем относительного покоя является «абсолютный» покой, под которым будет подразумеваться покой жидкости относительно земли. Приведем несколько примеров:

1) абсолютный покой — жидкость находится в покое в резервуаре, неподвижном относительно земли (фиг 3-1);

2) относительный покой: а) жидкость находится в покое относительно железнодорожной цистерны, которая вместе с жидкостью движется прямолинейно с некоторым ускорением (фиг 3-2); б) жидкость находится в покое относительно резервуара, который вместе с жидкостью вращается с постоянной угловой скоростью (фиг. 3-3).

На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют массовые силы (сила тяжести и сила инерции переносного движения), а из поверхностных сил только силы давления

3-1. Свойство гидростатического давления в точке

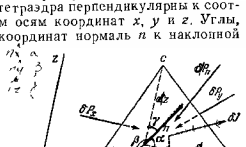
В объеме жидкости, находящейся в покое, который для общности будем полагать относительным, выделим произвольно расположенный элементарный тетраэдр с ребрами δx, δy и δz (фиг. 3-4). Три грани этого тетраэдра перпендикулярны к соответствующим прямоугольным осям координат x, y и z. Углы, которые образуют с осями координат нормаль n к наклонной грани, обозначим через α, β и γ. Площади граней обозначим индексом, соответствующим оси, перпендикулярной к грани. Эти площади будут равны:

$$\delta\omega_x = \frac{\delta y \delta z}{2}; \quad \delta\omega_y = \frac{\delta x \delta z}{2};$$

$$\delta\omega_z = \frac{\delta x \delta y}{2};$$

Площадь наклонной грани

$$\delta\omega_n = \frac{\delta\omega_x}{\cos\alpha} = \frac{\delta\omega_y}{\cos\beta} = \frac{\delta\omega_z}{\cos\gamma}.$$



Фиг. 3-4 Схема сил, действующих на элементарный тетраэдр.

На тетраэдр действует сила тяжести δG, сила инерции переносного движения δJ и силы давления δP_i. Сила тяжести направлена вертикально; сила инерции переносного движения — в сторону, обратную ускорению переносного движения. Проекции этих сил на оси координат будут равны:

$$\delta J_x + \delta G_x = X\delta M;$$
$$\delta J_y + \delta G_y = Y\delta M;$$
$$\delta J_z + \delta G_z = Z\delta M,$$

где $\delta M = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{6}$ — масса элементарного тетраэдра, а X, Y и Z — сумма проекций на оси координат ускорений массовых сил (силы тяжести и силы инерции переносного движения). Силы давления действуют перпендикулярно к соответствующим граням и направлены внутрь тетраэдра. Согласно формуле (2-1) на грань Oac действует сила, параллельная оси x и равная:

$$\delta P_x = p_{cp\,x}\delta\omega_x.$$

На грань Oac действует сила, параллельная оси y и равная

$$\delta P_y = p_{cp\,y}\delta\omega_y.$$

На грань Oab действует сила, параллельная оси z и равная

$$\delta P_z = p_{cp_z}\delta\omega_z.$$

На грань abc действует сила, параллельная нормали n и равная

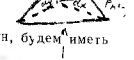
$$\delta P_n = p_{cp_n}\delta\omega_n.$$

Рассматриваемый тетраэдр находится в покое. Поэтому действующие на тетраэдр силы должны находиться в равновесии.

Пользуясь принципом затвердения, согласно которому равновесие жидкого тела не нарушится, если предположить его затвердевшим, можно применить условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Одним из условий равновесия системы сил является равенство нулю суммы их проекций на оси ~~координат~~.

Σ (проекций сил)$_x = 0$, Σ (проекций сил)$_y = 0$ и Σ (проекций сил)$_z = 0$.

Составим уравнение проекций сил на ось x.



$$\delta P_x - \delta P_n \cos\alpha + X\delta M = 0$$

Подставляя значения входящих сюда величин, будем иметь

$$p_{cp_x}\cdot\frac{\delta y\delta z}{2} - p_{cp_n}\cdot\frac{\delta y\delta z}{2} + X\rho\cdot\frac{\delta x\delta y\delta z}{6} = 0,$$

сократив на $\frac{\delta y\delta z}{2}$, получим

$$p_{cp_x} - p_{cp_n} + \frac{1}{3}\cdot X\rho\delta x = 0.$$

С приближением размеров тетраэдра к нулю p_{cp_x} и p_{cp_n} будут стремиться к значениям гидростатического давления в точке в направлениях оси $x - p_x$ и нормали $n - p_n$, а вследствие этого при переходе к пределу при $\delta x = 0$ получаем, что

$$p_x - p_n = 0, \quad \text{или} \quad p_x = p_n.$$

Составляя уравнения проекций сил на оси y и z, найдем, что

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n,$$

откуда следует:

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \tag{3.1}$$

Последнее равенство выражает, что *гидростатическое давление в точке покоящейся жидкости имеет значение, не зависящее от направления площадки, для которой оно вычислено.* Но гидростатическое давление в различных точках жидкости будет неодинаково

В гидростатике рассматривается только стационарное состояние жидкости. В этом случае каждая точка объема характеризуется определенным значением давления, что обычно и записывается в виде:

$$p = p(x, y, z). \tag{3.2}$$

Однако при этом необходимо иметь в виду, что функция p, кроме координат, должна включать некоторые начальные условия, а также физические величины, влияющие на значения давления. Такими величинами являются плотность жидкости и ускорения массовых сил. Размерность всех величин, от которых зависит p, должна позволить в определенной комбинации получить размерность давления p.

Каждому состоянию относительного покоя (фиг. 3-1—3-3) соответствует и свое конкретное выражение функции p, зависящее также и от расположения системы координат. Отысканию вида этой функции, т. е. отысканию закона распределения гидростатического давления по объему жидкости будут посвящены следующие параграфы

3-2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

В объеме жидкости, находящейся в покое, выделим элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами δx, δy и δz (фиг. 3-5), параллельными произвольно расположенным осям координат. Площади граней параллелепипеда, перпендикулярные к соответствующим осям координат, обозначим, как ранее. Они будут равны:

$$\delta\omega_x = \delta y\delta z; \quad \delta\omega_y = \delta x\delta z; \quad \delta\omega_z = \delta y\delta x.$$

На параллелепипед действует массовая сила — сила тяжести и в общем случае - также сила инерции переносного движения. Проекции этих сил на оси координат будут равны:

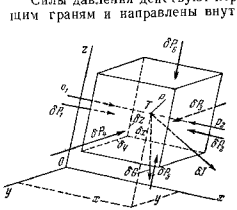
$$\delta J_x + \delta G_x = X\delta M,$$
$$\delta J_y + \delta G_y = Y\delta M,$$
$$\delta J_z + \delta G_z = Z\delta M,$$

где $\delta M = \rho\delta W$ — масса элементарного параллелепипеда;

X, Y и Z — алгебраические суммы проекций на оси координат ускорения силы тяжести и ускорения силы инерции переносного движения.

Кроме названных массовых сил, на параллелепипед действуют поверхностные силы — силы давления δP_i.

Силы давления действуют перпендикулярно к соответствующим граням и направлены внутрь рассматриваемого параллелепипеда.



Фиг. 3.5. Схема сил, действующих на элементарный параллелепипед.

Рассматриваемый параллелепипед находится в покое. Поэтому действующие на параллелепипед силы находятся в равновесии.

Составим уравнение проекций сил на ось x:

$$\delta P_1 - \delta P_2 + X\delta M = 0. \quad (3\text{-}3)$$

Обозначим координаты центра параллелепипеда T через x, y и z, а гидростатическое давление в центре — через p:

$$p = p(x, y, z).$$

При этом гидростатическое давление p_1 в центре левой грани, отстоящей от центра параллелепипеда на расстоянии $^1/_2\,\delta x$, будет равно:

$$p_1 = p\left(x - \frac{1}{2}\delta x,\ y,\ z\right),$$

или

$$p_1 = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x.$$

Аналогично для гидростатического давления p_2 в центре правой грани, отстоящей от центра параллелепипеда на расстоянии $^1/_2\,\delta x$, получим:

$$p_2 = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x.$$

Силы δP_1 и δP_2 вычислим по формулам[1]:

$$\delta P_1 = p_1\delta y\delta z;$$
$$\delta P_2 = p_2\delta y\delta z,$$

откуда

$$\delta P_1 - \delta P_2 = (p_1 - p_2)\cdot\delta y\delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x\delta y\delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta W. \quad (3\text{-}4)$$

[1] Для определения сил δP_1 и δP_2 надо было бы знать среднее давление по соответствующим площадкам. В общем случае эти средние давления отличаются от давлений в центре площадок p_1 и p_2. Однако, учитывая, что в дальнейшем надо будет перейти к пределу, когда рассматриваемый параллелепипед будет стремиться к точке, примем эти давления за средние.

Подставляя найденные значения в уравнение (3-3), будем иметь:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta W + X\rho\delta W = 0,$$

сокращая на δW и переходя к пределу, получим:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Аналогично рассуждая, но проецируя силы на ось y и на ось z, получим еще два уравнения равновесия. Всего, таким образом, будем иметь три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} &= 0;\\ Y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} &= 0;\\ Z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}5)$$

Использование уравнений моментов позволило бы доказать, что рассматриваемая система сил сходится в одной точке.

Для лучшего понимания смысла полученных уравнений уточним гидравлический смысл частного дифференциала и частной производной от давления: $\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x$ — частный дифференциал давления по x определяет собою изменение (увеличение или уменьшение) давления при переходе от одной точки к другой на расстоянии δx вдоль оси x. Частная производная от давления по координате определяет изменение давления в точках, расположенных вдоль соответствующей оси, приходящееся на единицу длины.

Уравнения (3-5) можно заменить одним. Для этого умножим каждое соответственно на dx, dy и dz и сложим. Получим:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot dz\right) = 0.$$

Так как гидростатическое давление есть функция только координат, выражение в скобках представляет полный дифференциал гидростатического давления:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot dz. \quad (3\text{-}6)$$

В связи с этим получим одно дифференциальное уравнение для жидкости, находящейся в относительном покое, в виде

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (3\text{-}7)$$

Уравнения (3 5) и (3-7) называются дифференциальными уравнениями равновесия жидкости. Они были получены Л. Эйлером в 1755 г. Покажем, что минус dp можно рассматривать как работу, производимую силами давления на перемещениях dx, dy и dz и отнесенную к единице объема. Для этого вычислим работу сил δP_i по формуле

$$dA_э = (\delta P_1 - \delta P_2)\cdot dx + (\delta P_3 - \delta P_4)\cdot dy + (\delta P_5 - \delta P_6)\cdot dz.$$

Подставляя значения сил δP_i, согласно формуле (3-4) найдем:

$$dA_э = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot dz\right)\cdot dW,$$

откуда

$$\frac{dA_э}{dW} = -dp. \qquad (3\ 8)$$

Каждое из уравнений (3-5) в отдельности позволяет определить закон распределения гидростатического давления p вдоль соответствующей оси координат. Совокупность двух уравнений определяет закон распределения гидростатического давления p в соответствующей плоскости. Совокупность трех уравнений или уравнение (3-7) позволяет определить закон распределения гидростатического давления p в объеме. Уравнения (3-5) и (3 7) справедливы для капельной жидкости и газа, причем для газов дополнительным уравнением является уравнение состояния (2-35).

Полученные выше в координатной форме уравнения Эйлера можно представить в векторной форме, а именно

$$\bar{j} + \bar{g} - \frac{1}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\,(p) = 0, \qquad (3\text{-}9)$$

где $\bar{j}$ — вектор ускорения силы инерции переносного движения;

grad (p) — градиент давления.

В справедливости этого уравнения легко убедиться, спроектировав его на оси координат, в результате чего получаются уравнения в координатной форме[1].

[1] При этом следует иметь в виду, что градиент давления grad (p) представляет собой вектор, проекция которого на любую ось равна частной производной от давления по соответствующему направлению. Например, проекция градиента на ось x равна

$$(\mathrm{grad}\,p)_x = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Из уравнения (3-9) следует, что направление ускорения равнодействующей массовых сил является тем направлением, в котором гидростатическое давление максимально возрастает. Из того же выражения следует, что в направлении, перпендикулярном к направлению ускорения равнодействующей массовых сил, давление имеет одно и то же значение.

Глава четвертая

ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В «АБСОЛЮТНОМ» ПОКОЕ

В этой главе рассматривается жидкость, находящаяся в покое относительно земли, причем в рассматриваемых вопросах вращение самой земли не принимается во внимание Поэтому на результаты исследований оказывают влияние лишь силы гидростатического давления и силы тяжести. Для этого случая

$$X = g_x;\quad Y = g_y;\quad Z = g_z.$$

Исследование законов равновесия газов будет приведено гл. 26. В настоящей главе в дальнейшем будут рассмотрены только капельные жидкости.

4-1. Основное уравнение гидростатики и поверхности равного давления для несжимаемой жидкости, подверженной действию сил тяжести и давления

Для получения основного уравнения гидростатики воспользуемся дифференциальным уравнением равновесия (3 7)

$$dp = \rho\,(X dx + Y dy + Z dz).$$

Расположим оси координат так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх (фиг. 4-1). Так как при этом

$$X = 0,\quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g,$$

это уравнение можно представить в виде:

$$dp = -\rho g dz.$$

Поскольку $\rho g = \gamma$, а объемный вес γ так же, как и плотность ρ, для несжимаемой однородной жидкости есть величина постоянная, предыдущее выражение можно записать и так:

$$dp = -\gamma dz, \qquad (4\text{-}1)$$

или

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0,$$

откуда

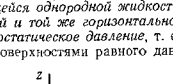
$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}^{*}. \qquad (4\cdot2)$$

Уравнение (4 2) справедливо для любых точек одного и того же объема однородной капельной жидкости, находящейся в равновесии. В этом уравнении давление p может быть и абсолютным и избыточным.

Для двух частиц с координатами z_1 и z_2 уравнению (4 2) можно придать вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}. \qquad (4\cdot3)$$

Уравнение (4 3) будем называть основным уравнением гидростатики. *Из этого уравнения следует, что в одном и том же объеме покоящейся однородной жидкости все частицы, расположенные в одной и той же горизонтальной плоскости, имеют одно и то же гидростатическое давление*, т. е. горизонтальные плоскости являются поверхностями равного давления.



Фиг. 4-1. Ось z направлена вертикально.

Фиг. 4-2. Сообщающиеся сосуды, заполненные одной жидкостью.

Заметим, что под одним и тем же объемом жидкости следует понимать такой объем однородной жидкости, две любые частицы которого могут быть соединены линией, не выходящей за пределы этого объема. Так, например, объемы жидкости, заполняющие так называемые сообщающиеся сосуды, изображенные на фиг. 4-2 или 4-3, могут рассматриваться каждый как один и тот же объем. Для таких объемов давление в точках *1* и *2*, расположенных на одном и том же горизонтальном уровне, будут равны. Отсюда также следует, что в сообщающихся сосудах с одинаковым давлением на свободной поверхности (фиг. 4-2) уровни однородной жидкости в обоих сосудах располагаются на

* idem (идэм) здесь и в дальнейшем употребляется только в смысле «одно и то же», т. е имеющее одно и то же значение в рассматриваемой области (в объеме или на линии) лишь в данный момент времени, в отличие от const, означающей постоянство величины во времени.

одной и той же высоте, так как свободные поверхности представляют поверхности равного давления.

Примером более сложных объемов будут объемы жидкости A и B с присоединенным к ним дифференциальным ртутным ма-

Фиг. 4-3. Горизонтальные плоскости являются поверхностями равного давления.

Фиг. 4-4. Схема дифференциального ртутного манометра

нометром (фиг. 4-4). Точки A и B этих объемов уже не могут быть соединены линией, не выходящей за пределы только одной жидкости. Поэтому в общем случае давления в точках A и B, расположенных на одном и том же уровне, не будут равны между собой.

4-2. Определение величины абсолютного и избыточного гидростатического давлений в любой точке несжимаемой жидкости. Закон Паскаля

Для определения давления в любой точке жидкости, находящейся в равновесии (фиг. 4-1), воспользуемся основным уравнением гидростатики (4-3).

Решая это уравнение и обозначая разность глубин погружения точек *1* и *2* через $h = z_1 - z_2$, получим:

$$p_2 = p_1 + \gamma h, \qquad (4\cdot4)$$

или

$$p_1 = p_2 - \gamma h \qquad (4\cdot5)$$

Из формул (4-4) и (4 5) следует, что для определения давления в произвольной точке жидкости необходимо знать давление в какой либо другой точке, принадлежащей тому же объему, а также глубину погружения одной точки относительно другой

Если точка *1* взята на поверхности, где давление равно атмосферному давлению, т. е. где $p_1 = p_{am}$, формула для определения избыточного давления в любой точке обратится в

$$p_u = +\gamma h, \qquad (4\cdot6)$$

где h — глубина точки от свободной поверхности жидкости, а знак минус соответствует вакууму (фиг 4-3).

В этом случае величина избыточного давления зависит только от высоты столба жидкости. Следует обратить внимание, что числовое значение $\gamma \cdot h$ можно рассматривать как вес столба жидкости высотой h с площадью поперечного сечения, равной единице. Но при этом нужно помнить, что величина $\gamma \cdot h$ имеет размерность $кГ/м^2$.

Из изложенного следует, что в жидкости, находящейся в абсолютном покое, разность давлений в различных точках жидкости обусловливается только влиянием веса жидкости. В тех случаях, когда влияние веса невелико и им можно пренебречь, гидростатическое давление во всех точках рассматриваемого покоящегося объема можно считать одинаковым.

Из формул (4-4) и (4-5) следует *закон Паскаля, согласно которому давление, создаваемое в любой точке несжимаемой жидкости, находящейся в покое и продолжающей оставаться в покое, передается одинаково всем точкам объема жидкости.*

Действительно, при увеличении давления, например (фиг. 4-3) в точке, *1*, на величину δp на столько же увеличится давление и в другой любой точке объема.

4-3. Эпюра гидростатического давления

Изобразим графически (фиг. 4-5) изменение гидростатического давления в зависимости от глубины вдоль какой-либо плоской стенки, наклоненной к горизонту под углом θ. В точке O, находящейся на поверхности жидкости, давление примем равным p_0. В точке, находящейся на глубине h от поверхности жидкости, давление будет равно:

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Фиг 4 5 Графическое изображение закона распределения гидростатического давления по глубине.

Последнее выражение может быть представлено в виде

$$p = p_0 + \gamma \sin\theta\, l, \qquad (4\text{-}7)$$

где l расстояние рассматриваемой точки от точки O

Если выбрать оси координат, как показано на фиг 4-5, то графически зависимость

$$p = p(l)$$

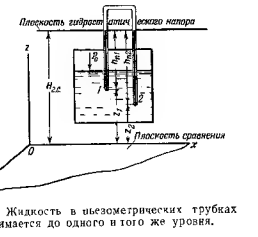
изобразится прямой линией, наклоненной к оси абсцисс (оси l) под углом θ, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\theta = \gamma \sin\theta \qquad (4\text{-}8)$$

Для построения этой линии достаточно знать давление лишь в двух точках рассматриваемого сечения. Изобразив эти давления в виде перпендикуляров в соответствующих точках и соединив концы этих перпендикуляров прямой линией, получим эпюру гидростатического давления. В любой промежуточной точке гидростатическое давление будет измеряться длиной перпендикуляра, восставленного в данной точке до пересечения с прямой эпюры.

4-4. Гидростатический напор

Физический смысл закона, выражаемого формулой (4-2), может быть весьма наглядно показан на схеме, приведенной на фиг. 4-6. В точках *1* и *2* установлены две стеклянные трубки, соединенные вверху между собой. Предположим, что воздух и



Фиг. 4-6. Жидкость в пьезометрических трубках поднимается до одного и того же уровня.

пары жидкости, заполняющие верхнюю часть стеклянных трубок, полностью выкачаны. Тогда в образовавшемся безгазовом пространстве давление будет равно нулю. Пренебрегая капиллярностью, высоту подъема жидкости в обеих трубках вычислим по формуле

$$h_{n_1} = \frac{p_1}{\gamma} \quad \text{и} \quad h_{n_2} = \frac{p_2}{\gamma}. \qquad (4\text{-}9)$$

Тогда на основании формулы (4-3) в соответствии с (4-9) получим.

$$z_1 + h_{n_1} = z_2 + h_{n_2},$$

откуда следует, что в обеих трубках жидкость поднимается до одного и того же уровня, высоту которого обозначим через H_{zc}

$$H_{zc} = z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}. \qquad (4\text{-}10)$$

Имеющая одно и то же значение для одного и того же объема жидкости величина $H_{гс}$ называется полным гидростатическим напором, z — геометрическим напором или геометрической высотой, $\frac{p}{\gamma}$ — пьезометрическим напором или пьезометрической высотой. Заметим, что в этом выражении p является абсолютным давлением

Уровень $H_{гс}$ определяет горизонтальную плоскость, называемую плоскостью гидростатического напора. Эта плоскость соответствует абсолютному давлению.

Если бы стеклянные трубки вверху были открыты, то жидкость в них поднялась бы ниже на величину $\frac{p_{ат}}{\gamma}$. Уровни жидкости оказались также на одной высоте в плоскости, соответствующей избыточному давлению. Величину

$$H_u = z + \frac{p_u}{\gamma} \qquad (4\text{-}11)$$

будем называть гидростатическим напором, соответствующим избыточному давлению, а величину $\frac{p_u}{\gamma}$ — пьезометрическим напором или пьезометрической высотой, соответствующей избыточному давлению

Гидростатический напор равен удельной потенциальной энергии покоящейся жидкости. Под удельной энергией подразумевается энергия, отнесенная к единице веса жидкости (к 1 *кГ*).

В самом деле, численное значение потенциальной энергии некоторой частицы равно той работе, которую могут совершить силы, действующие на частицу при перемещении ее из данного положения в такое, в котором потенциальная энергия равна нулю. На частицу действуют сила тяжести и давление. На уровне координатной плоскости xoy будем условно считать потенциальную энергию положения равной нулю. При этом работа, которую совершит сила тяжести, будет равна:

$$A_m = \delta G z,$$

где z — вертикальная координата рассматриваемой частицы;
δG — ее вес

Силы, обусловливающиеся гидростатическим давлением, могут проявить свое действие различным образом. В том случае, если над данной частицей установлена трубка, из которой выкачан воздух, частица жидкости весом δG поднимается до плоскости гидростатического напора на высоту $\frac{p}{\gamma}$, на уровне которой $p = 0$. Для вычисления работы, производимой при этом

силами давления, воспользуемся уравнением (3-8), проинтегрировав его в пределах от p до $p = 0$. При этом получим:

$$A_д = -\frac{\delta G}{\gamma}\int_p^0 dp = \delta G \frac{p}{\gamma}.$$

Таким образом, суммарная работа, которую могут совершить силы, действующие на частицу с весом δG, численно равная ее потенциальной энергии, будет равна:

$$\pi = A_m + A_д,$$

или

$$\pi = \delta G\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \qquad (4\text{-}12)$$

Если отнести потенциальную энергию к единице веса, найдем удельную потенциальную энергию, которая будет равна гидростатическому напору

$$\pi_y = z + \frac{p}{\gamma} = H_{гс}. \qquad (4\text{-}13)$$

Из выражения гидростатического напора следует, *что все частицы одного и того же объема однородной покоящейся жидкости обладают одинаковой удельной потенциальной энергией.*

Эта удельная потенциальная энергия складывается из двух частей: z — удельной потенциальной энергии положения; $\frac{p}{\gamma}$ — удельной потенциальной энергии давления.

При этом следует отметить, что величина удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$ имеет конкретное для данной точки значение, определяемое гидростатическим давлением и объемным весом. Этого нельзя сказать о потенциальной энергии положения. Энергия положения измеряется вертикальной координатой z, отсчитываемой от произвольной горизонтальной плоскости сравнения, на уровне которой условно считаем потенциальную энергию положения равной нулю. При этом полезно вспомнить из механики, что произвольность выбора уровня с потенциальной энергией, равной нулю, оправдывается тем, что для приложений важно знать не столько величину потенциальной энергии в данной точке, сколько разность ее между двумя точками, каковая, конечно, не будет зависеть от положения плоскости сравнения.

4-5. Условия равновесия разнородных жидкостей

Рассмотрим равновесие двух различных жидкостей с объемным весом γ_1 и γ_2. Определим форму поверхности их раздела. Для этого воспользуемся уравнением (4-1)

$$dp = \gamma dz.$$

Так как на поверхности раздела, являющейся общей для двух жидкостей, dp имеет одно и то же значение для обеих жидкостей, то для обеих жидкостей справедливо равенство

$$\gamma_1 dz = \gamma_2 dz,$$

что при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ возможно только если $dz = 0$, откуда следует, что $z = \text{const}$ или что *поверхностью раздела двух соприкасающихся различных жидкостей является горизонтальная плоскость*. Поэтому она является также и поверхностью равного давления. Последнее следует также и из того, что при $dz = 0$ и $dp = 0$

4-6. Сообщающиеся сосуды

На фиг. 4-2 были рассмотрены сообщающиеся сосуды, заполненные одной и той же жидкостью. Здесь рассмотрим те же сосуды, но заполненные (фиг. 4-7) жидкостями с объемными весами γ_1 и γ_2.

Для каждой жидкости в отдельности справедливо уравнение (4-4). Воспользуемся им для определения отношения высот столбов жидкости h_1 и h_2. Рассмотрим случай, когда на свободной поверхности обеих жидкостей давления одинаковы и равны p_0.

Так как поверхность раздела является поверхностью равного давления, то для двух точек *1* и *2* будут справедливы следующие зависимости:

$$p_1 = p_2,$$

$$p_1 = p_0 + \gamma_1 h_1;$$

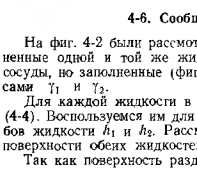
$$p_2 = p_0 + \gamma_2 h_2,$$

откуда

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2, \qquad (4\text{-}14)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$



Фиг 4-7. Сообщающиеся сосуды, заполненные различными несмешивающимися жидкостями. Поверхность раздела есть горизонтальная плоскость.

т. е. *в сообщающихся сосудах с одинаковым давлением на свободной поверхности высоты столбов обратно пропорциональны объемным весам жидкостей.*

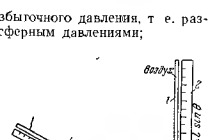
4-7. Жидкостные приборы для измерения давления

Приборы, служащие для измерения давления в жидкостях, как правило, являются дифференциальными, так как измеряют не абсолютное давление, а разность давлений в точках двух сред. Исключение представляют приборы для измерения атмосферного давления — барометры. Остальные типы приборов в зависимости от их назначения называются:

манометры для измерения избыточного давления, т. е. разности между абсолютным и атмосферным давлениями;

вакуумметры для измерения вакуума, т. е. разности между атмосферным и абсолютным давлениями; дифференциальные манометры — для измерения произвольной разности давлений в двух произвольных точках.

По принципу действия приборы бывают жидкостные, пружинные, поршневые, электрические и комбинированные. Наибольшее распространение получили пружинные и жидкостные приборы, причем последние, так же как и поршневые, главным образом в лабораторной практике



Фиг. 4-8. Пьезометр с вертикальной и наклонной трубками.

Рассмотрим кратко схемы лишь жидкостных приборов. Подробнее о приборах можно прочесть в ряде руководств [1].

В своем простейшем виде жидкостный манометр, называемый пьезометром (фиг 4-8), состоит из вертикальной или для малых давлений наклонной стеклянной трубки *1* с внутренним диаметром не менее 5 *мм* и шкалы *2*. Верхний конец трубки открыт и сообщает внутреннюю полость трубки с атмосферой. Нижний конец трубки присоединяется к резервуару *3* с жидкостью, в которой измеряется давление. Жидкость, находящаяся под давлением, заполняет трубки, поднимаясь в них на некоторую высоту.

Абсолютное давление $p_{аб}$ на уровне нуля шкалы манометра может быть определено по формуле (если пренебречь капиллярностью)

$$p_{аб} = p_{ат} + \gamma h = p_{ат} + \gamma l \sin\theta. \qquad (4\text{-}15)$$

---

[1] М. К. Жоховский, Техника измерения давления и разрежения, Машгиз, 1952.

Н. З. Френкель, Руководство к лабораторным работам по курсу гидравлики и насосов, издание Военной ордена Ленина академии бронетанковых и механизированных войск Советской Армии имени И. В. Сталина, 1947.

Избыточное давление на том же уровне вычисляется по формуле

$$p_u = \gamma l \sin\theta \qquad (4\text{-}16)$$

Весьма часто давление условно определяют высотой столба жидкости в манометрической трубе. Например, когда говорят, что давление равно 7,1 *м* вод. ст. или 522,0 *мм* рт ст, — это значит, что данное давление может быть создано водяным столбом высотой $h = 7{,}1$ *м* или ртутным столбом высотой $h = 522$ *мм*. Величина же давления в $кГ/м^2$ определится по формуле

$$p = \gamma h,$$

где γ — объемный вес жидкости, $кГ/м^3$;
h — высота столба жидкости, соответствующего давлению, *м*.

Для того чтобы давление p выразить высотой столба жидкости, надо вычислить h по формуле

$$h = \frac{p}{\gamma}. \qquad (4\text{-}17)$$

Из этой формулы следует, что одному и тому же давлению будут соответствовать в зависимости от объемного веса разные высоты столбов жидкости (табл. 4 1).

Таблица 4 1

Значение высоты столба жидкости (ртути, воды, масла, керосина, бензина и воздуха) соответствующее p 1 $кГ/см^2$ — 10 000 $кГ/м^2$

Род жидкости	Ртуть	Вода	Масло	Керосин	Бензин	Воздух
Объемный вес γ, $кГ/м^3$	13 600	1 000	920	800	750	1,2
Высота столба жидкости h, *м* . .	0,735	10	10,87	12,5	13,33	8 333

Для измерения давлений больше 0,3 $кГ/см^2$ в качестве рабочей жидкости следует применять ртуть. На фиг. 4-9 показана схема ртутно-чашечного манометра. В этом приборе обычно нуль на шкале совпадает с уровнем ртути в резервуаре *1* при $h = 0$. Поэтому размеры этого резервуара должны быть таковы, чтобы понижением уровня в нем при $h > 0$ можно было пренебречь. В противном случае нужно считаться с понижением нулевого уровня. Абсолютное давление на уровне нуля шкалы прибора *2* (капиллярностью пренебрегаем) определяется по формуле

$$p_{аб} = p_{ат} + \gamma_p h,$$

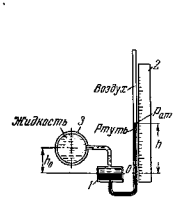
Давление p в центре резервуара *3* вычисляется по формуле

$$p_1 = p_{ат} - \gamma_p h \quad \gamma h_0, \qquad (4\text{-}18)$$

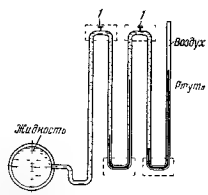
где γh_0 можно рассматривать как поправку к показаниям прибора, обусловленную его расположением по отношению к точке, давление в которой определяется.

Для измерения давлений, превышающих 3—4 $кГ/см^2$, может служить батарейный манометр, схема которого показана на фиг. 4-10

Разность давлений δp в двух точках может быть измерена посредством дифференциального манометра. На фиг. 4-11 показан дифференциальный манометр, представляющий собой два обыкновенных пьезометра (и поэтому называемый дифференциальным пьезометром), соединенных вверху между собой. При любом давлении в газовом пространстве пьезометра (в этом приборе обычно пренебрегают влиянием веса газа) разность давлений δp в двух точках *1* и *2* одинаковой жидкости, расположенных на одной и той же высоте, определяется по формуле



Фиг 4 9 Схема ртутно чашечного манометра.



Фиг 4-10. Схема батарейного ртутного манометра.

1 краны для спуска воздуха

$$\delta p = \gamma h, \qquad (4\text{-}19)$$

где h — показание манометра;
γ — объемный вес жидкости.

При больших разностях давлений в качестве рабочей жидкости в дифференциальном манометре применяется ртуть. Схема ртутного дифференциального манометра показана на фиг. 4-12. Разность давлений в двух точках *1* и *2* одинаковой

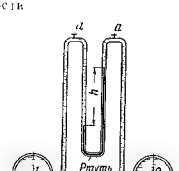
жидкости, расположенных на одной высоте, определяется по формуле

$$\delta p = (\gamma_p - \gamma)h. \qquad (4\text{-}20)$$

Вывод этой формулы разобран в задаче 4-5.

При малых разностях давлений применяется дифференциальный манометр, изображенный на фиг. 4-13. Верхняя часть его заполнена газом, а рабочей жидкостью, объемный вес которой $\gamma_{раб}$ меньше γ жидкости

Фиг. 4-11. Схема дифференциального манометра.
а — кран для впуска в сжатого воздуха



Фиг. 4-12. Схема дифференциального ртутного манометра.
а — краны для впуска воздуха

Разность давлений в двух точках 1 и 2 одной жидкости, расположенных на одной высоте, определяется по формуле

$$\delta p = (\gamma - \gamma_{раб})h. \qquad (4\text{-}21)$$

При значениях $\gamma_{раб}$, близких к γ, даже при малых разностях давлений показания прибора могут быть весьма велики, чем достигается большая точность измерения давления. В качестве рабочей жидкости можно применять керосин, масло и т. п.

Жидкостные манометры отличаются высокой точностью измерений, но благодаря их громоздкости при измерении больших давлений применяются главным образом в лабораторной практике.

Для измерения вакуума также применяются жидкостные и пружинные вакуумметры.

На фиг. 4-14 изображен ртутно-чашечный вакуумметр. Вакуум на уровне нуля шкалы прибора вычисляется по формуле

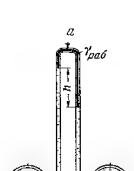
$$p_в = \gamma_p h_в$$

Вакуум в центре резервуара A, если соединительная трубка 2 полностью заполнена жидкостью из резервуара A, вычисляется по формуле

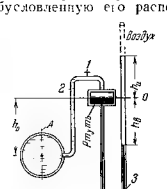
$$p_в = \gamma_p h_в - \gamma h_0, \qquad (4\text{-}22)$$

где γ — объемный вес жидкости в резервуаре.

В этой формуле γh_0 также следует рассматривать как поправку к показанию прибора, обусловленную его располо-



Фиг. 4-13. Схема дифференциального манометра, у которого $\gamma_{раб}$ меньше γ измеряемой жидкости
а — кран для спуска воздуха и зарядки прибора



Фиг. 4-14. Схема ртутно-чашечного вакуумметра
1 — кран для спуска воздуха при регулировке прибора. Может служить и для освобождения присоединительной трубки 2 от жидкости. 3 — вакуумметрическая трубка

жением. Так же как и давление, высотой столба жидкости выражают и вакуум, вычисляя его по формуле

$$h_в = \frac{p_в}{\gamma} = \frac{p_{ат} - p_{аб}}{\gamma}, \qquad (4\text{-}23)$$

где γ — объемный вес той жидкости, относительно которой определяется вакуум.

В измерительных приборах вакуум весьма часто измеряют в миллиметрах ртутного столба, иногда в метрах водяного столба. Ртутно-чашечный вакуумметр может быть приспособлен и для измерения избыточного давления, т. е. превращен в мановакуумметр. Для этого необходимо заменить вакуумметрическую трубку 3 другой соответствующей длины, что и показано на фиг. 4-14 пунктиром.

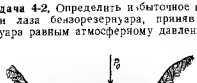
Задача 4-1. Определить абсолютное и избыточное гидростатические давления в водоеме на глубине $h = 15$ м (фиг. 4-15).

Решение. Для решения задачи пользуемся формулой (4-4)

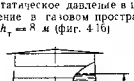
где $p_0 = 10\,000$ $кГ/м^2$ — атмосферное давление на поверхности,
$\gamma = 1\,000$ $кГ/м^3$ — объемный вес воды,
$h = 15$ $м$ — глубина

$$p = 10\,000 + 15 \cdot 1\,000 = 25\,000 \ кГ/м^2 = 2{,}5 \ кГ/см^2,$$
$$p_a = \gamma \cdot h = 15\,000 \ кГ/м^2 = 1{,}5 \ кГ/см^2.$$

Задача 4-2. Определить избыточное гидростатическое давление в центре крышки лаза бензоресервуара, принять давление в газовом пространстве резервуара равным атмосферному давлению, а $h_т = 8$ $м$ (фиг. 4-16)



Фиг. 4-15. К задаче 4-1.



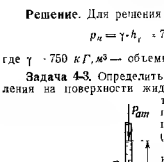
Фиг. 4-16. К задаче 4-2.

Решение. Для решения задачи пользуемся формулой (4-6).

$$p_a = \gamma \cdot h_т = 750 \cdot 8 = 6\,000 \ кГ/м^2 = 0{,}6 \ кГ/см^2,$$

где $\gamma = 750$ $кГ/м^3$ — объемный вес бензина.

Задача 4-3. Определить величину избыточного гидростатического давления на поверхности жидкости в сосуде, находящемся в покое, если в трубке жидкостного манометра (пьезометра) вода поднялась на высоту $h = 1{,}5$ $м$. Свободный конец пьезометра открыт и сообщается с атмосферой (фиг. 4-17)



Фиг. 4-17. Жидкостный манометр К задаче 4-3.

Решение. Так как жидкость в сосуде и манометре находится в равновесии, то во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости давление одинаково, т. е. $p_1 = p_0$, таким образом

$$p_a = \gamma \cdot h = 1\,000 \cdot 1{,}5 = 1\,500 \ кГ/м^2 = 0{,}15 \ кГ/см^2.$$

В этой задаче, так же как и в последующих, влиянием капиллярности пренебрегаем.

Задача 4-4. Определить вакуум в цилиндре A, заполненном воздухом, если в трубке жидкостного вакуумметра вода поднялась на высоту $h = 2$ $м$ (фиг. 4-18)

Решение. Для определения вакуума определим сначала гидростатическое давление в цилиндре по формуле (4-5), допуская, что во всем пространстве, заполненном воздухом, имеется одно и то же гидростатическое давление (такое допущение возможно благодаря малому объемному весу воздуха по сравнению с объемным весом жидкости в вакуумметре)

$$p = p_{ат} - \gamma h,$$

где $p_{ат}$ — атмосферное давление;
γ — объемный вес жидкости в вакуумметре;
h — показание вакуумметра.

Вакуум определяется по формуле

$$p_в = p_{ат} - p,$$

т. е.

$$p_в = \gamma \cdot h,$$

или

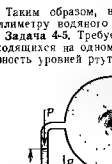
$$p_в = 1\,000 \cdot 2 = 2\,000 \ кГ/м^2 = 0{,}2 \ кГ/см^2$$

Обычно вакуум выражают не величиной давления, а высотой столба жидкости. Для того чтобы выразить вакуум в метрах водяного столба, надо $p_в$ разделить на γ

$$h_в \, [м \ вод. \ ст] = \frac{p_в}{\gamma} = \frac{2\,000}{1\,000} = 2 \ м \ вод. \ ст$$

Таким образом, вакуум соответствует 2 $м$ вод. ст., причем каждому миллиметру водяного столба вакуумметра соответствует вакуум в 1 $кГ/м^2$.

Задача 4-5. Требуется определить разность давлений в точках A и B, находящихся на одном уровне в двух цилиндрах, наполненных водой, если разность уровней ртути в дифференциальном манометре (фиг. 4-19) $h = 15$ $см$.



Фиг. 4-18. Схема жидкостного вакуумметра К задаче 4-4.

Фиг. 4-19. Схема ртутного дифференциального манометра К задаче 4-5.

До ртути трубки дифференциального манометра C и D заполнены водой. Температура $t = 20°C$

Решение. Жидкость в дифференциальном манометре находится в равновесии. Поэтому давление в точке 1 равно давлению в точке 3 — как давления в точках однородной жидкости, расположенных в горизонтальной плоскости, т. е.

$$p_1 = p_3.$$

На том же основании

$$p_2 = p_4.$$

В то же время

$$p_A = p_1 + \gamma_в \cdot h_1, \quad p_B = p_2 + \gamma_в \cdot h_2,$$

откуда

$$p_A - p_B = (p_1 - p_2) - \gamma_в \cdot (h_2 - h_1),$$

но

$$p_1 = p_2 + \gamma_р \cdot h.$$

Подставляя давление p_A в предыдущую формулу, получим

$$p_A - p_B = h\cdot(\gamma_p - \gamma_в),$$

где $h = 0{,}5$ м — показание манометра, а γ_p — объемный вес ртути

$$\gamma_p = \frac{\gamma_0}{1 + 0{,}00018\,t}.$$

$\gamma_0 = 13\,600$ кГ/м³ — объемный вес ртути при $t = 0°$ С,

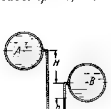
$\gamma_в = 1\,000$ кГ/м³, $t = 20°$ С.

Итак,

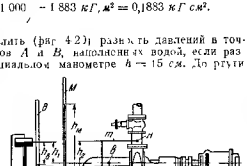
$$p_A - p_B = 0{,}5\cdot\left(\frac{13\,600}{1 + 0{,}00365\cdot 20} - 1\,000\right) = 1\,883\ кГ/м^2 = 0{,}1883\ кГ/см^2.$$

Задача 4-6. Требуется определить (фиг. 4-20) разность давлений в точках, находящихся на оси цилиндров A и B, наполненных водой, если разность уровней ртути в дифференциальном манометре $h = 15$ см. До ртути трубки дифференциального манометра заполнены водой; температура $t = 20°$ С. Разность уровней осей цилиндров $H = 1$ м.

Ответ: $\Delta p = 0{,}0883$ кГ/см².



Фиг. 4-20. Схема ртутного дифференциального манометра. К задаче 4-6.



Фиг. 4-21. Схема присоединения манометра и вакуумметра к насосу. M — манометр, B — вакуумметр. К задаче 4-7.

Задача 4-7. Требуется определить (фиг. 4-21) абсолютное давление в точке n (во всасывающем патрубке) и в точке m (в напорном патрубке) центробежного насоса, перекачивающего воду с температурой $t = 20°$ С. К точке n присоединен ртутно-чашечный вакуумметр B, а к точке m — ртутно-чашечный манометр M. Вакуумметр показывает $h_в = 0{,}5$ м рт. ст. Манометр показывает $h_м = 1{,}5$ м рт. ст. Высота $h_1 = 0{,}5$ м, $h_2 = 0{,}2$ м. Трубки m и n, соединяющие чашечные приборы с точками m и n, полностью заполнены также водой.

Барометрическое (атмосферное) давление $h_б = 738$ мм рт. ст. Температура $t = 20°$ С.

Ответ: $p_n = 0{,}0725$ кГ/м², $p_m = 2{,}056$ кГ/см².

Задача 4-8. Цилиндр (фиг. 4-22) и трубки двухжидкостного манометра в частях C и E наполнены водой, в частях D и F — ртутью. Свободный конец манометра открыт и сообщается с атмосферой. Определить показание манометра M. В пространстве цилиндра A находится воздух.

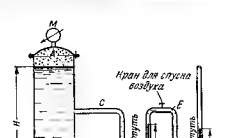
Дано: $H = 4$ м, $h_1 = 0{,}1$ м, $h_2 = 0{,}9$ м, $h_3 = 0{,}5$ м, $\gamma_в = 1\,000$ кГ/м³, $\gamma_р = 13\,600$ кГ/м³.

Ответ: $p = 0{,}4$ кГ/см².

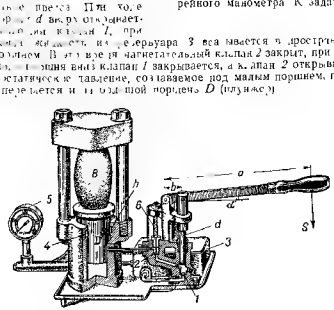
Задача 4-9. Гидравлический пресс (фиг. 4-23) развивает силу, с которой гидравлический пресс сжимает грузы B, а также к прессу согласно следующим данным: $a = 30$ см, $b = 5$ см, $d = 5$ см, $D = 25$ см, $h = 25$ мм. Диаметр поршня G равен 0,5 м, коэффициент трения между металлическими грузами и цилиндром D G равен 0,100 кГ. Удельный вес рабочей жидкости $\gamma = 0{,}15$ кГ/см³.

Давление в прессе. При ходе малого поршня d вверх опускается всасывающий клапан 1, при этом рабочая жидкость из резервуара 3 всасывается в пространство под малым поршнем. В это время нагнетательный клапан 2 закрыт, при обратном ходе малого поршня вновь клапан 1 закрывается, а клапан 2 открывается.

Гидростатическое давление, создаваемое под малым поршнем, по закону Паскаля передается и на большой поршень D (плунжер).



Фиг. 4-22. Схема двухжидкостного батарейного манометра. К задаче 4-8.



Фиг. 4-23. Схема гидравлического пресса. К задаче 4-9.

Усилие, создаваемое давлением жидкости на большой поршень, уменьшается вследствие трения между плунжером 4 и поршнем. Давление регистрируется манометром 5. Клапан 6 — предохранительный.

Решение. Сила S, приложенная к рукоятке малого поршня, передается на поршень с силой в результате рычага

$$P = \frac{Sa}{b} = \frac{15\cdot 30}{5} = 90\ кГ.$$

Гидростатическое давление под малым поршнем равно

$$p = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{360}{\pi 0{,}5^2} = 4{,}586\ кГ/см^2.$$

Сила, передаваемая на большой поршень,

$$N = p\frac{\pi D^2}{4} = P\frac{D^2}{d^2} = 2\,250\ кГ$$

Гидростатическое давление передается и на манжет, прижимая последний к поршню с силой

$$F = ph\pi D = 4{,}586 \cdot 2{,}5\pi 25 = 900\ кГ$$

При этом создается сила трения

$$T = fF = 0{,}15 \cdot 900 = 135\ кГ$$

Сила, сжимающая груз,

$$R = N - G - T = 2\,015\ кГ.$$

Коэффициент полезного действия η найдем (пренебрегая трением малого поршня) из соотношения

$$\eta = \frac{RdH}{Sad\varphi} = \frac{R}{N},$$

где RdH — полезная работа, совершаемая при сжатии груза на dH,
$Sad\varphi$ — элементарная работа, совершаемая усилием S, прикладываемым к рукоятке при повороте ее на угол $d\varphi$,

$$bd\varphi = \frac{D^2}{d^2}\,dH$$

Подставляя в η значения G и N, получим

$$\eta = \frac{R}{N} = \frac{N - T - G}{N} = 1 - \frac{T}{N} - \frac{G}{N} = 1 - \frac{4fh}{D} - \frac{G}{S\frac{a}{b}\frac{D^2}{d^2}} = \frac{2\,015}{2\,250} = 0{,}895.$$

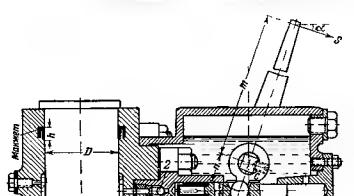
Задача 4-10. Гидравлический домкрат. Определить усилие, которое необходимо приложить к рукоятке гидравлического домкрата (фиг. 4-24), а также его к. п. д. для того, чтобы поднять груз весом $G = 10\,000\ кГ$.

Размеры рукоятки $m = 30\ см$, $n = 2{,}5\ см$. Вес плунжера домкрата $G_п = 20\ кГ$. Диаметр плунжера $D = 12\ см$, диаметр поршня $d = 1{,}6\ см$, высота кожаного манжета $h = 1{,}5\ см$, коэффициент трения $f = 0{,}15$.

Действие гидравлического домкрата осуществляется следующим образом: при ходе малого поршня d вправо открывается всасывающий клапан 1 и жидкость по каналу c из полости домкрата 3 всасывается в пространство под малым поршнем. При ходе малого поршня влево клапан 1 закрывается. Создающееся под поршнем давление, открывая нагнетательный клапан 2, передается по закону Паскаля жидкости, находящейся в камере 4 под подъемным плунжером D. При этом создается усилие, приподнимающее головку домкрата с находящимся на ней грузом. Чтобы спустить груз, надо открытием крана, не показанного на фигуре, спустить жидкость из камеры 4 в камеру 3.

Решение. Сила S, приложенная к рукоятке домкрата, передается на малый поршень с силой (пренебрегая углом α)

$$P = S\frac{m}{n}$$



Фиг. 4-24. Гидравлический домкрат. К задаче 4-10.

Под малым поршнем создается гидростатическое давление

$$p = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

Сила, передаваемая на большой поршень,

$$N = p\frac{\pi D^2}{4} = P\frac{D^2}{d^2} = S\frac{m}{n}\cdot\frac{D^2}{d^2}.$$

Гидростатическое давление передается кожаному манжету, который прижимается к большому поршню, создавая силу трения

$$T = fp\pi Dh = \frac{4fh}{D}S\frac{m}{n}\frac{D^2}{d^2}$$

Сила, передающаяся поднимаемому грузу, должна быть больше G

$$G < N - T - G_п = S\frac{m}{n}\frac{D^2}{d^2}\left(1 - \frac{4fh}{D}\right) - G_п.$$

Из последнего выражения найдем

$$S > \frac{G + G_п}{\frac{m}{n}\frac{D^2}{d^2}\left(1 - \frac{4fh}{D}\right)} = \frac{10\,000 + 20}{\frac{30}{2{,}5}\left(\frac{12}{1{,}6}\right)^2\left(1 - \frac{4 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}5}{12}\right)} = 16{,}05\ кГ$$

Коэффициент полезного действия η найдем, пренебрегая трением малого поршня, из соотношения

$$\eta = \frac{GdH}{Smd\varphi} = \frac{G}{N},$$

где GdH — полезная работа, совершаемая для подъема груза на высоту dH,

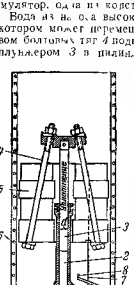
$S\,ma\,\varphi$ — элементарная работа, совершаемая усилием S, приложенным к рукоятке при повороте ее на угол $d\varphi$, а $ma\,\varphi = \frac{D}{a}\,dH$. Подставляя в уравнения G и A, получим

$$\eta = \frac{4\,\varphi H}{D} \cdot \frac{G_n}{S_n\,m\,D^2} = \frac{4 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 15}{12} \cdot \frac{20}{10{,}05 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}6^2} = 0{,}923,$$

или 92,3%.

Задача 4-11. Гидравлический грузовой аккумулятор. В гидропрессовых установках широкое распространение получил гидравлический грузовой аккумулятор, одна из конструкций которого изображена на фиг. 4-25.

Вода из высокого давления через трубу *1* подается в цилиндр *2*, в котором может перемещаться плунжер *3*. К головке плунжера посредством болтовых тяг *4* подвешены грузы *5*, свободно перемещающиеся вместе с плунжером *3* в цилиндрической балке *6*, устанавливаемой на прочном фундаменте. Перемещение плунжера начнется тогда, когда давление на него, оказываемое жидкостью, будет больше веса движущихся частей аккумулятора и сил трения. Гидростатическое давление, создаваемое грузовым аккумулятором, если пренебречь ускорением движущихся масс, определяется весом подвижных частей аккумулятора и площадью поперечного сечения плунжера.



Фиг. 4-25. Гидравлический аккумулятор. К задаче 4-11.

В гидропрессовых установках аккумуляторы являются потребителями энергии в моменты, когда прессы работают недостаточно интенсивно, и, наоборот, являются источниками энергии в моменты, когда производительность насосов, питающих прессовые установки, недостаточна, чтобы удовлетворить требуемую потребность в воде.

Обязательной аппаратурой при всяком грузовом аккумуляторе является предельный останов, ограничивающий его верхнего положения в виде предохранительного клапана, открывающегося тогда, когда подъем аккумулятора в крайнее верхнее положение, а также предохранительный клапан для уменьшения скорости падения грузов аккумулятора в момент его разрядки. Дроссельный клапан *8* действует при нижнем дальнем аккумулятора на рычаг *7*.

Определить давление, создаваемое гидравлическим грузовым аккумулятором, изображенным на фиг. 4-25, и запасаемую им энергию согласно следующим данным веса движущихся частей $G = 20\,000$ *кГ*, диаметр плунжера $D = 20$ *см*, площадь поперечного сечения плунжера $S = 314$ *см*², ход плунжера $H = 5$ *м*, ширина кожаного манжета, уплотняющего $h = 25$ *мм*, коэффициент трения кожа по металлу $f = 0{,}5$.

Решение. Давление создаваемое в цилиндре аккумулятора под плунжером, определится из выражения

$$p\omega = G \pm \pi d h f p,$$

где знак „+" относится к подъему грузов, а „−" к опусканию

$$p = \frac{G}{\omega \pm \pi d h f}.$$

В последнем выражении „+" относится к опусканию груза. Энергия, запасаемая аккумулятором (пренебрегаем энергией положения), определяется энергией давления и будет равна удельной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$, умноженной на всю жидкость в объеме цилиндра аккумулятора $\frac{\pi d^2}{4} H$ [*кГ*]. Таким образом

$$\Pi = p\,\frac{\pi d^2}{4}\,H\ [\text{кГ}\cdot\text{м}]$$

Подставляя значения, получаем (для спуска)

$$p = \frac{20\,000}{314 + 3{,}14 \cdot 2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}15} = 207{,}3\ \text{кГ/см}^2$$

$$\Pi = 207{,}3 \cdot 314 \cdot 7 = 455\,645\ \text{кГ}\cdot\text{м} = 4\,469\,877\ \text{дж}$$

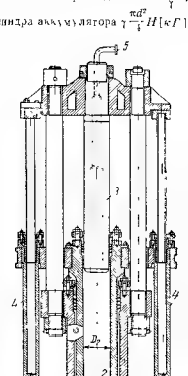
Если принять продолжительность разгрузки аккумулятора в 20 *сек*, то развиваемая им в среднем мощность определяется по формуле

$$N = \frac{\Pi}{120} = 37\,249\ \text{вт}$$

Задача 4-12. Гидравлический мультипликатор. Определить давление, создаваемое гидравлическим мультипликатором, согласно следующим данным: вес подвижных частей мультипликатора $G = 400$ *кГ*, $D_1 = 25$ *см*, $D_2 = 5$ *см*, $a_0 = 2{,}5$ *см*. Размеры кожаных манжетов $h_1 = 20$ *мм*; $h_2 = 20$ *мм*.

Давление, создаваемое аккумулятором, $p_{акк} = 200$ *кГ/см*².

Гидравлический мультипликатор устанавливается в гидропрессовых установках обычно в тех случаях, когда давление, создаваемое аккумулятором, бывает недостаточным. Конструкция гидравлического мультипликатора (фиг. 4-26) в основном состоит из неподвижного цилиндра *1*, в котором находится подвижный плунжер *2*. Подвижный плунжер одновременно служит также и цилиндром, внутри которого находится неподвижный плунжер *3*. Подвижный плунжер-цилиндр *2* соединен жестко с подвижной поперечиной, которая несет на себе вспомогательные подвижные цилиндры *4*. Жидкость под давлением, создаваемым аккумулятором (порядка 200 *кГ/см*²), попадает в подвижный цилиндр *1* и заставляет поднимаиться вверх подвижный цилиндр *2*. Жидкость также заполняет и полость цилиндра *2*, откуда она вытесняется к прессу по трубопроводу *5* под увеличивающимся давлением. В описываемом мультипликаторе уплотнение плунжеров выполнено в виде так называемых сальников.



Фиг. 4-26. Гидравлический мультипликатор. К задаче 4-12.

Решение. Пренебрегая ускорением движущихся частей, определим давление, создаваемое мультипликатором в цилиндре *1*, рассмотрим равновесие сил, действующих на цилиндр *2*, спроектировав их на вертикаль.

Снизу вверх действует давление жидкости, находящейся под аккумуляторным давлением $p_{ак}$ в полости цилиндра 1

$$P_1 = p_{ак} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_0^2)$$

Сверху вниз действуют вес подвижных частей G, сила трения цилиндров 1 и 2 в уплотнении $T_1 = fh_1\pi D_1 p_{ак}$, сила трения в уплотнении цилиндра 2 с плунжером 3 $T_2 = fh_2\pi D_2 p_{мул}$ и сила мультипликаторного давления жидкости в полости цилиндра 2, равная

$$P_2 = p_{мул} \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_0^2)$$

Трением в уплотнениях вспомогательных цилиндров 4 можно при ходе вверх пренебречь ввиду того, что в этот момент цилиндры не работают. Их назначение — приводить систему в начальное положение.

Итак, будем иметь

$$P_1 - G - T_1 - T_2 - P_2 = 0,$$

или, подставляя значения

$$p_{ак} \frac{\pi}{4} (D_1^2 - d_0^2) - fh_1\pi D_1 \cdot p_{ак} - fh_2\pi D_2 p_{мул} -$$

$$- p_{мул} \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_0^2) - G = 0,$$

откуда

$$p_{мул} = p_{ак} \frac{4fh_1 D_1 + D_1^2 - d_0^2 - \frac{4G}{\pi \cdot p_{ак}}}{4fh_2 D_2 + D_2^2 - d_0^2}$$

Подставляя значения, найдем:

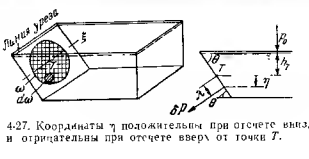
$$p_{мул} = 200 \frac{4 \cdot 0{,}15 \cdot 2 \cdot 0{,}25 + 625 - 6{,}25 - \frac{4 \cdot 400}{\pi \cdot 200}}{4 \cdot 0{,}15 \cdot 2 \cdot 15 + 225 - 6{,}25} = 495{,}2 \text{ кГ/см}^2$$

4-8. Статическое давление жидкости на плоскую поверхность. Гидростатический парадокс

Для определения силы P давления жидкости на плоскую поверхность (на фиг. 4-27 заштрихована), площадь которой равняется ω, разобьем ее произвольным образом на бесконечно малые площадки $d\omega$. Давление жидкости на поверхность определим как сумму сил давлений на отдельные элементарные площадки $d\omega$.

Рассмотрим какую-либо элементарную площадку, центр которой расположен на глубине η, от уровня, проходящего через центр тяжести всей площади T. Давление в центре тяжести этой площади обозначим через p_T. Тогда гидростатическое давление в центре элементарной площадки будет равно:

$$p = p_T + \gamma\eta,$$



Фиг. 4-27. Координаты η положительны при отсчете вниз, и отрицательны при отсчете вверх от точки T.

где η для частиц, расположенных выше центра тяжести, имеет отрицательное значение. Сила давления на элементарную площадку будет равна:

$$dP = pd\omega = (p_T + \gamma\eta)d\omega.$$

Силу давления на всю стенку определим, взяв интеграл по всей смоченной площади:

$$P = \int_\omega (p_T + \gamma\eta)d\omega. \tag{4-24}$$

Разобьем этот интеграл на сумму двух интегралов, тогда получим:

$$P = p_T \int_\omega d\omega + \gamma \int_\omega \eta d\omega.$$

Первый интеграл

$$\int_\omega d\omega = \omega.$$

Второй интеграл можно представить в виде

$$\sin\theta \int_\omega \lambda d\omega,$$

где λ — расстояние элементарной площадки от оси ξ, расположенной в плоскости стенки, проходящей через ее центр тяжести и параллельной линии уреза жидкости; но $\int_\omega \lambda d\omega$ — статический момент площади ω относительно оси ξ. Такой статический момент равен нулю:

$$\int_\omega \lambda d\omega = 0, \tag{4-25}$$

поэтому

$$P = p_T\omega. \tag{4-26}$$

Таким образом, *сила давления жидкости на плоскую поверхность равна произведению площади этой поверхности на величину гидростатического давления в ее центре тяжести.* Если давление на свободной поверхности равно p_0, а глубина погружения центра тяжести равна h_T, то

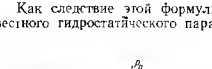
$$p_T = p_0 + \gamma h_T. \qquad (4\text{-}27)$$

Формулой (4-26) можно воспользоваться и для определения силы давления на плоские днища резервуаров и т. п. В этом случае h_T есть глубина центра тяжести смоченной поверхности дна.

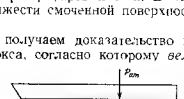
Как следствие этой формулы получаем доказательство известного гидростатического парадокса, согласно которому *величина силы давления жидкости на дно резервуара не зависит от формы резервуара и количества жидкости в нем.* Действительно, сила давления на равновеликие днища резервуаров различной формы (фиг. 4-28) при одних и тех же значениях p_0, γ и h_T согласно формулам (4-26) и (4-27) будет иметь одно и то же значение

$$P = (p_0 + \gamma h_T)\omega \qquad (4\text{-}28)$$

для всех форм резервуаров.



Фиг. 4-28. Гидростатический парадокс. Независимо от формы сосуда силы давления одной и той же жидкости на равновеликие днища одинаковы



Фиг. 4-29. Графическое изображение зависимости избыточной силы давления P_u на плоскую прямоугольную стенку от глубины

Если давление на свободной поверхности равно атмосферному $p_0 = p_{am}$ и определяется величина избыточного давления, расчетной формулой будет:

$$P_u = p_T \cdot \omega = \gamma h_T \omega. \qquad (4\text{-}29)$$

В этом случае для прямоугольной стенки (фиг. 4-29) ширины b сила давления на участок стенки длиной l

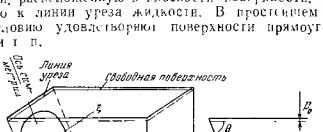
$$P_u = \gamma \sin\Theta \frac{bl^2}{2}, \qquad (4\text{-}30)$$

т. е. сила давления возрастает по квадратичной параболе относительно l

4-9. Центр статического давления жидкости на плоскую поверхность

Центром давления называется точка приложения равнодействующей сил давления на некоторую поверхность.

Сначала рассмотрим плоскую поверхность, имеющую ось симметрии, расположенную в плоскости поверхности, перпендикулярно к линии уреза жидкости. В простейшем случае этому условию удовлетворяют поверхности прямоугольная, круглая и т. п.



Фиг. 4-30. Центр статического давления $Д$ всегда расположен ниже центра тяжести T.

Центр тяжести T смоченной площади этой поверхности расположен на оси симметрии (фиг. 4-30). Для таких поверхностей центр давления $Д$ также будет расположен на оси симметрии ниже центра тяжести на расстоянии $\lambda_Д$. Для определения расстояния $\lambda_Д$ вычислим момент равнодействующей силы P относительно оси ξ, расположенной в плоскости поверхности и проходящей через центр тяжести смоченной площади, параллельно линии уреза. При этом получим

$$P\lambda_Д = \int_\omega dP\lambda.$$

Подставляя вместо P и dP их значения, будем иметь:

$$p_T \omega \lambda_Д = \int_\omega (p_T - \gamma\eta)\, d\omega\, \lambda,$$

вводя вместо

$$\eta = \lambda \sin\Theta$$

и имея в виду, что

$$\int_\omega \lambda\, d\omega = 0,$$

получим

$$p_T\omega\cdot\lambda_Д=\gamma\sin\Theta\int_\omega\lambda^2 d\omega.$$

Заменяя

$$\int_\omega\lambda^2 d\omega=J_T,$$

где J_T — момент инерции смоченной площади относительно оси ξ, найдем:

$$\lambda_Д=\frac{\gamma\sin\Theta J_T}{p_T\omega}. \qquad (4\ 31)$$

Отсюда следует, что центр давления расположен всегда ниже центра тяжести поверхности.

В том случае, если на свободной поверхности давление равно атмосферному давлению,

$$p_{Ta}=\gamma h_T;$$

для координаты центра избыточного давления получим

$$\lambda_{Да}=\frac{J_T\sin\theta}{h_T\omega}. \qquad (4\text{-}32)$$

Если плоская стенка ограничена произвольным контуром, для которой ось λ, проходящая через центр тяжести перпендикулярно линии среза свободной поверхности, уже не является осью симметрии, кроме координаты $\lambda_Д$, необходимо найти вторую координату $\xi_Д$, для чего следует вычислить момент равнодействующей силы P, но уже относительно оси λ. При этом получим

$$p_T\omega\xi_Д=\int_\omega(p_T+\gamma\lambda)\cdot\xi\cdot d\omega,$$

или

$$p_T\omega\xi_Д=\gamma\sin\theta\int_\omega\lambda\xi d\omega,$$

откуда

$$\xi_Д=\frac{\gamma\cdot\sin\theta\cdot J_{\xi\lambda}}{p_T\cdot\omega}, \qquad (4\ 33)$$

где $J_{\xi\lambda}$ — центробежный момент инерции площади относительно осей ξ и λ.

Следует отметить, что для плоской стенки, имеющей ось симметрии, принимаемую за ось λ (фиг 4 30), центробежный момент $J_{\xi\lambda}=0$. Поэтому $\xi_Д=0$, т е. центр давления лежит на оси симметрии, как и было предположено в первой части доказательства.

Для некоторых, часто встречающихся в практике случаев расчетные формулы для определения глубины погружения центра избыточного давления $h_Д$ приведены в табл. 4-2.

Таблица 4 2

Форма стенки	Фиг. 4 31	Фиг. 4 32	Фиг 4 33	Фиг 4-34	Фиг 4 35	Фиг 4 36	Фиг. 4 37
$h_Д$	$\frac{h}{2}\cdot\frac{3b+B}{2b+B}$	$\frac{2}{3}\cdot h$	$h_0+\frac{h}{3}\cdot\frac{3h_1+2h}{2h_0+h}$	$\frac{h}{2}$	$h_0+\frac{h}{2}\cdot\frac{2h_0+h}{3h_0+h}$	$h_0+\frac{8h_1+5d}{2\cdot h_0+d}\cdot x$	$0,294\cdot d$

Задача 4-13. Определить силу избыточного давления бензина на крышку лаза бензорезервуара (см также фиг 4 15) согласно данным задачи 4 2, принят $D=0,4$ *м*.

Решение. Сила избыточного давления определится согласно формуле (4-29)

$$P=\gamma h_T\omega=750\cdot 8\cdot 0,1257=753,6\ кГ,$$

где

$$\omega=0,785\cdot D^2=0,785\cdot 0,16=0,1257\ м^2.$$

Центр давления находится от свободной поверхности на расстоянии

$$h_Д=h_T+\frac{J_T}{\omega\cdot h_T}=8+\frac{0,001256}{0,1257\cdot 8}=8,00125\ м,$$

где

$$J_T=\frac{\pi\cdot D^4}{64}=\frac{3,14\cdot 0,4^4}{64}=0,001256\ м^4.$$

4-10. Статическое давление жидкости на криволинейные поверхности

На каждую из элементарных площадок криволинейной поверхности действует элементарная сила, направленная по нормали к элементарной площадке и равная dP. В общем случае элементарные силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве Такая система сил в общем случае приводится к одной силе

$$P=\int_\omega dP, \qquad (4\text{-}34)$$

называемой главным вектором, который равен векторному интегралу от элементарных сил, и к одной паре, момент которой M называется главным моментом сил давления:

$$M = \int_{\omega} r\, d\bar{P} \qquad (4\text{-}35)$$

В последней формуле под интегралом стоит векторное произведение радиуса-вектора r центра элементарной площадки относительно центра моментов на вектор dP.

В частных случаях может оказаться, что силы давления приводятся только к одной силе, называемой равнодействующей силой, что должно быть хорошо известно из курса теоретической механики

В качестве примера, когда давления приводятся к одной силе, можно указать на шаровую поверхность. В этом случае равнодействующая сила давлений должна пройти через центр шара.

Можно также показать, что давление покоящейся жидкости на любое тело, полностью погруженное в нее (и находящееся в покое), также приводится только к одной равнодействующей.

В дальнейшем определим лишь величину главного вектора сил давления, который будем называть просто вектором давления.

В общем случае направление вектора давления может быть любым в пространстве и поэтому для определения P по величине и направлению достаточно вычислить его проекции на три взаимно перпендикулярные направления, например на три оси координат. В этом случае величина вектора давления определится по формуле

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \qquad (4\text{-}36)$$

а направление косинусами направляющих углов, т. е. углов, образуемых направлением вектора давления с осями координат:

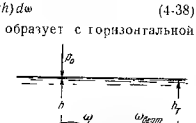
$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P}; \quad \cos(P, y) = \frac{P_y}{P}; \quad \cos(P, z) = \frac{P_z}{P}. \qquad (4\text{-}37)$$

Рассмотрим определение проекции вектора давления на горизонтальную ось. Для этого разобьем (фиг. 4-38) рассматриваемую криволинейную поверхность (на фигуре заштрихована) на элементарные площадки $d\omega$, на каждую из которых действует элементарная сила dP. Выберем в жидкости произвольный уровень, давление на котором p_0 известно и который может быть расположен как выше, так и ниже площадки. Обозначим глубину центра этой площадки относительно уровня с известным давлением через h. Сила давления на эту элементарную площадку может быть вычислена по формуле

$$dP = (p_0 + \gamma h)\, d\omega \qquad (4\text{-}38)$$

Пусть эта элементарная сила образует с горизонтальной осью проекций угол θ. Проекция этой силы будет равна:

$$dP_{гор} = (p_0 + \gamma h)\, d\omega \cos\theta. \qquad (4\text{-}39)$$



Фиг. 4-38. К определению горизонтальной проекции силы давления на криволинейную поверхность

Произведение $d\omega \cos\theta$ можно рассматривать как проекцию элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную к оси проекций, т. е. на вертикальную плоскость. Обозначим ее через $d\omega_{верт}$. Таким образом,

$$dP_{гор} = (p_0 + \gamma h)\, d\omega_{верт}. \qquad (4\text{-}40)$$

Проекция вектора давления будет равна алгебраической сумме проекций элементарных сил, т. е. интегралу

$$P_{гор} = \int_{\omega} dP_{гор} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h)\, d\omega_{верт}$$

Разобьем этот интеграл на два

$$p_0 \int_{\omega} d\omega_{верт} \quad \text{и} \quad \gamma \int_{\omega} h\, d\omega_{верт}$$

Первый интеграл равен:

$$\int_{\omega} d\omega_{верт} = \omega_{верт}.$$

Второй интеграл равен статическому моменту площади вертикальной проекции криволинейной поверхности относительно оси, расположенной в плоскости уровня с известным давлением:

$$\int_{\omega} h\, d\omega_{верт} = h_T \omega_{верт},$$

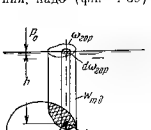
где h_T — глубина центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности относительно уровня с известным давлением.

Таким образом, проекция вектора давления на горизонтальную ось будет равна:

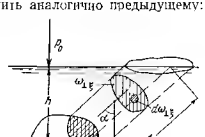
$$P_{гор} = (p_0 + \gamma h_T)\, \omega_{верт}. \qquad (4\text{-}41)$$

Итак, *чтобы найти горизонтальную проекцию вектора давления, надо найти силу давления на проекцию криволинейной поверхности на вертикальную плоскость, перпендикулярную к оси проекций.*

Для того чтобы определить вертикальную проекцию вектора давления, надо (фиг. 4-39) поступить аналогично предыдущему:



Фиг. 4-39. К определению вертикальной проекции силы давления на криволинейную поверхность



Фиг. 4-40. К определению проекций силы давления на криволинейную поверхность

разбить криволинейную поверхность на элементарные площадки, найти элементарные силы, но спроектировать их уже на вертикальную ось проекции. Обозначим через ϑ угол, который образует элементарная сила dP, но теперь уже с вертикальной осью проекций. Тогда для проекции вектора давления на вертикальную ось получим выражение, аналогичное (4-39), а именно

$$dP_{верт} = (p_0 + \gamma h)\, d\omega \cos\vartheta.$$

Произведение $d\omega \cos\vartheta$ равно проекции элементарной площадки на горизонтальную плоскость. Поэтому предыдущее выражение может быть записано в виде

$$dP_{верт} = (p_0 + \gamma h)\, d\omega_{гор}, \tag{4-42}$$

откуда

$$P_{верт} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h)\, d\omega_{гор}.$$

Первый интеграл равен

$$p_0 \int_{\omega} d\omega_{гор} = p_0 \omega_{гор}.$$

Второй интеграл имеет простой геометрический смысл, а именно $\int_{\omega} h\, d\omega_{гор}$ равен цилиндрическому объему, основанием которого служит криволинейная поверхность. С противоположной стороны этот объем ограничен уровнем, на котором известно давление p_0. Назовем этот объем объемом тела давления $W_{тд}$.

Таким образом,

$$P_{верт} = p_0 \omega_{гор} + \gamma W_{тд}. \tag{4-43}$$

Легко показать, что если бы уровень с известным давлением был расположен ниже криволинейной площадки, то расчетная формула получилась бы в виде

$$P_{верт} = p_0 \omega_{гор} - \gamma W_{тд}. \tag{4-44}$$

Для определения проекции главного вектора на произвольное направление (фиг. 4-40) поступаем аналогично предыдущему случаю.

Для произвольного направления ξ будем иметь

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h)\, d\omega \cos\psi$$

или

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h)\, d\omega_{\lambda\xi}, \tag{4-45}$$

где $d\omega_{\lambda\xi}$ — проекция криволинейной площадки на плоскость, перпендикулярную к оси ξ.

Вместо h введем в рассмотрение величину ξ — расстояние от центра элементарной площадки до уровня с известным давлением (расстояние измеряется параллельно оси проекций). Обозначим через α угол, образуемый осью ξ с вертикалью, тогда

$$h = \xi \cos\alpha,$$

при этом

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma\xi\cos\alpha)\, d\omega_{\lambda\xi},$$

или

$$P_{\xi} = p_0 \int_{\omega} d\omega_{\lambda\xi} + \gamma\cos\alpha \int_{\omega} \xi\, d\omega_{\lambda\xi}.$$

Первый интеграл равен

$$\int_{\omega} d\omega_{\lambda\xi} = \omega_{\lambda\xi},$$

где $\omega_{\lambda\xi}$ — проекция криволинейной площадки на плоскость, перпендикулярную оси ξ.

Второй интеграл $\int_{\omega} \xi\, d\omega_{\lambda\xi}$ равен объему цилиндрического тела, параллельного оси проекции и ограниченного с одной стороны криволинейной поверхностью, а с другой — плоскостью уровня с известным давлением

Назовем этот объем объемом тела давления и обозначим его через $W_{m.\partial}$.

Таким образом,

$$P_\xi = p_0\omega_{.\xi} + \gamma W_{m.\partial}\cos\alpha, \tag{4-46}$$

где $\gamma W_{m.\partial}\cos\alpha$ можно рассматривать как вес жидкости в объеме тела давления.

В этой формуле за угол α всегда можно принимать острый угол, а знак выражения $\gamma W_{m.\partial}\cos\alpha$ принимать в зависимости от того, где расположен уровень с известным давлением.

Если он будет выбран ниже криволинейной поверхности, то формула для P_ξ должна быть представлена в виде:

$$P_\xi = p_0\omega_{.\xi} - \gamma W_{m.\partial}\cos\alpha. \tag{4-47}$$

Из этих формул получаются формулы (4-43) и (4-44), как частный случай ($\alpha \to 0$). Для горизонтальной проекции ($\alpha = 90°$) второй член этой формулы обращается в неопределенность $\infty \cdot 0$.

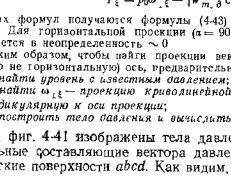
Таким образом, чтобы найти проекции вектора давления на произвольную (но не горизонтальную) ось, предварительно необходимо

а) *найти уровень с известным давлением;*

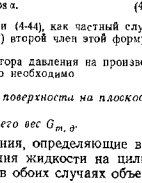
б) *найти $\omega_{.\xi}$ — проекцию криволинейной поверхности на плоскость, перпендикулярную к оси проекции;*

в) *построить тело давления и вычислить его вес $G_{m.\partial}$.*

На фиг. 4-41 изображены тела давления, определяющие вертикальные составляющие вектора давления жидкости на цилиндрические поверхности *abcd*. Как видим, в обоих случаях объемы



Фиг. 4-41. Вертикальная составляющая давления только жидкости на криволинейную поверхность *abcd* слева направлена вверх, справа—вниз и в обоих случаях равна весу жидкости в объеме *abcdmtnw*.



Фиг. 4-42. Разрез сферического резервуара. К задаче 4-14.

тела давления ограничены криволинейными поверхностями, четырьмя вертикальными плоскостями и горизонтальной плоскостью, совпадающей с уровнем жидкости, давление на котором p_0 предполагается известным. На поверхность слева сила давления направлена вверх, на поверхность справа — вниз. В обоих случаях сила давления вычисляется по одной и той же формуле

$$P_{верт} = p_0\omega + \gamma W_{m.\partial},$$

где $\gamma W_{m.\partial}$ — вес жидкости в объеме *abcdmtnw*;

ω — заштрихованные проекции криволинейных поверхностей *mtnw*

Задача 4-14. Определить напряжение σ, возникающее в сечении сферического резервуара (фиг. 4-42), на уровне ниже опор ($\theta = 35°$). Резервуар почти полностью наполнен бензином объемного веса $\gamma = 715$ *кГ/м³*. Диаметр резервуара $D = 10{,}5$ *м*. Давление в газовом пространстве (незаполненная жидкостью верхняя часть резервуара) принимаем равным атмосферному. Толщина стенки $S = 10$ *мм*.

Решение. Для вычисления напряжения σ рассечем резервуар конической поверхностью на уровне, определяемом углом $\theta = 35°$, и рассмотрим равновесие нижней части резервуара. Внешние силы, действующие на оставшуюся нижнюю часть резервуара (силы избыточного давления жидкости P_u, силы действия верхней части резервуара на нижнюю N), спроектируем на вертикальную ось. Вертикальная составляющая силы P_u согласно формуле (4-43) равна весу тела давления, т. е. весу жидкости, заключенной в объеме *abmtn*. Этот объем слагается из объема цилиндра W_1 (объем *abmn*) высотой $h_1 = R + R\cos\theta$ с радиусом основания $r = R\sin\theta$ и объема шарового сегмента W_2 (объем *mtn*), высота которого $h_2 = R - R\cos\theta$ с тем же радиусом основания r

$$W_2 = \frac{\pi h_2^2}{3}\cdot(3R - h_2).$$

Таким образом,

$$P_{верт} = \gamma(W_1 + W_2) = \gamma\pi R^3\left\{\sin^2\theta\,(1 + \cos\theta) + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{3}\times\right.$$
$$\left.\times[3 - (1 - \cos\theta)]\right\}.$$

Проекцию на вертикальную ось сил N, с которыми верхняя часть резервуара действует на нижнюю, вычислим по формуле

$$N_{верт} = \sigma 2\pi r S\sin\theta = \sigma 2\pi RS\sin^2\theta.$$

Так как резервуар находится в равновесии, то силы $P_{верт}$ и $N_{верт}$ должны быть равны между собой

Приравнивая их, получим:

$$2\pi RS\sin^2\theta = \gamma\pi R^3\left\{\sin^2\theta\,(1 + \cos\theta) + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{3}\cdot[3 - (1 - \cos\theta)]\right\},$$

откуда

$$\sigma = \frac{\gamma R^2}{2S}\left\{(1 + \cos\theta) + \frac{(1 - \cos\theta)^2}{3\sin^2\theta}[3 - (1 - \cos\theta)]\right\};$$

заменяя

$$\sin^2\theta = (1 - \cos\theta)\cdot(1 + \cos\theta),$$

после несложных преобразований получим:

$$\sigma = \frac{\gamma R^2}{3S}\left(\frac{5}{2 + 2\cos\theta}\right).$$

Для условий примера

$$\sigma = \frac{715\cdot 5{,}25^2}{3\cdot 0{,}010}\cdot\left(\frac{2{,}5}{1 + 0{,}819}\right) = 1\,884\,669\ кГ/м^2 = 188{,}5\ кГ/см^2.$$

Задача 4-15. Определить силу давления, воспринимаемую закруглением водопровода (фиг. 4-43), предполагая, что жидкость находится в покое. Весом жидкости пренебрегаем. Дано: $\theta = 60°$; $d = 0{,}205$ *м*; давление жидкости $p = 4$ *кГ/см²*.

Решение. Рассмотрим объем жидкости, ограниченный фланцами a и b. Указанный объем находится под действием сил давления на поперечные ограничивающие сечения P и результирующей реакции стенок самого колена.

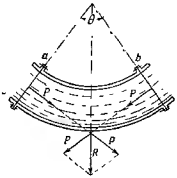
Результирующая давлений на поперечные ограничивающие сечения равна

$$R = 2p \cdot \frac{\pi d^2}{4} \sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi 20{,}5^2}{4} \sin 30^\circ = 1\,320 \text{ кГ}.$$

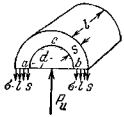
Это результирующее давление и воспринимается коленом, т. е. уравновешивается реакцией стенок колена.

Задача 4-16. Определить максимальное давление, которое может быть сообщено жидкости в водопроводной трубе (фиг. 4-44), принимая во внимание напряжение, возникающее в материале трубопровода только от давления жидкости.

При определении соответствия трубопровода условиям прочности нужно исходить из тех давлений $p_{доп}$, которые допускаются техническими условиями и обычно указываются в ГОСТ на трубопроводы. Следует отметить, что напряжение в материале трубопровода, рассчитанное по допускаемому давлению $p_{доп}$, иногда



Фиг. 4-43. Водопроводное закругление. К задаче 4-15.



Фиг. 4-44. Схема сил, действующих на рассеченный трубопровод. К задаче 4-16.

значительно меньше общепринятого допускаемого напряжения на растяжение для материала трубопровода.

Дано: диаметр трубы $d = 205$ *мм*, толщина стенки $s = 10{,}5$ *мм*, длина трубы $l = 4\,000$ *мм*, допускаемое напряжение в материале стенок трубы $\sigma = 3$ *кГ мм²*.

Решение. Опасным сечением для трубы будет ее любое диаметральное сечение.

Силу давления жидкости на цилиндрическую поверхность acb определяют, пренебрегая весом жидкости, как силу давления жидкости на проекцию цилиндрической поверхности на диаметральную плоскость ab по формуле

$$P_u = p_u\, dl$$

Указанная сила давления воспринимается двумя сечениями стенки трубы, поэтому $p_u\, dl = 2sl\sigma$, откуда

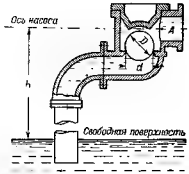
$$p_u = \frac{2s\sigma}{d} = \frac{2 \cdot 10{,}5 \cdot 3}{205} = 0{,}307 \text{ кГ мм}^2 = 30{,}7 \text{ кГ см}^2$$

Задача 4-17. В центре A на осной (фиг. 4-45) камеры поршневого насоса в момент начала всасывания создается вакуум, соответствующий $h_в = 6$ *м* вод. ст. Определить результирующее усилие, с которым жидкость (вода), находящаяся во всасывающем трубопроводе и в насосной камере, действует на шаровой всасывающий клапан.

Дано: $h = 5$ *м*, $D = 70$ *мм*, $d = 50$ *мм*.

Ответ: $P = \gamma\left[\frac{\pi D^3}{6} + \frac{\pi d^2}{4}(h_в - h)\right] = 2{,}142$ *кГ*.

Результирующее усилие P направлено вверх.



Фиг. 4-45. Шаровой клапан в камере поршневого насоса. К задаче 4-17.

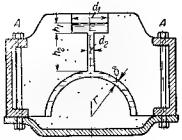
Задача 4-18. В литейной отформована и заливается чугуном цилиндрическая крышка длиной $l = 500$ *мм* (фиг. 4-46). Определить сумму сил, действующих на болты A, если вес земли в верхней части опоки равен 750 *кГ*, а $r = 500$ *мм*, $\delta = 15$ *мм*, $d_1 = 150$ *мм*, $d_2 = 30$ *мм*, $h_1 = 100$ *мм*, $h_2 = 300$ *мм*. Объемный вес чугуна см. табл. 2-4.

Ответ: 1 077 *кГ*.

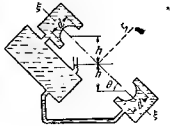
Задача 4-19. Определить силу избыточного давления жидкости на две одинаковые, но по-разному расположенные полусферические крышки в сосуде, наполненном водой. На фиг. 4-47 показано сечение сосуда вертикальной плоскостью.

Дано: $d = 0{,}5$ *м*, $h = 2$ *м*, $\theta = 45^\circ$.

На свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному.



Фиг. 4-46. Схема литейной опоки. К задаче 4-18.



Фиг. 4-47. Сферические крышки. К задаче 4-19.

Указание. Равнодействующая сила, воспринимаемая каждой крышкой, равна геометрической сумме двух ее проекций на оси ξ и ζ.

При определении проекции силы на ось ζ поверхность каждой крышки необходимо разбить на две части, каждая из которых должна быть расположена лишь по одну сторону от оси ξ.

Ответ: $P_\xi = 4\,5{,}84$ *кГ*; $P_\zeta = 23{,}14$ *кГ*.

Глава пятая

ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОКОЕ

Определение и несколько примеров относительного покоя были приведены в начале гл. 3. Достаточно подробно ниже будут рассмотрены лишь два частных случая относительно покоя, а именно: покой при переносном прямолинейном движении и покой при переносном вращательном движении вокруг вертикальной оси Случай переносного вращательного движения вокруг горизонтальной оси, принципиально не отличающийся от предыдущего, будет рассмотрен в связи с осевым усилием в центробежном насосе.

Заметим, что жидкость, начавшая двигаться из состояния «абсолютного» покоя, приходит в состояние относительного покоя не сразу, причем переход из одного состояния в другое происходит под влиянием сил трения, хотя в самом состоянии относительного покоя силы трения и отсутствуют.

5-1. Дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости, находящейся в относительном покое

Для получения уравнения поверхности равного давления будем исходить из уравнения (3-7):

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (5\text{-}1)$$

В общем случае, как указывалось, под X, Y и Z следует подразумевать алгебраическую сумму проекций на соответствующие оси координат ускорений силы тяжести и силы инерции переносного движения.

Так как вдоль поверхности равного давления

$$dp = 0,$$

то

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \qquad (5\text{-}2)$$

Уравнение (5-2) и является дифференциальным уравнением поверхности равного давления.

Это уравнение имеет определенный механический смысл. Из теоретической механики известно, что трехчлен (5-2) определяет элементарную работу массовых сил на перемещении dx, dy и dz Применительно к рассматриваемому случаю перемещение взято вдоль поверхности равного давления. Из (5-2) следует, что элементарная работа массовых сил вдоль поверхности равного давления равна нулю. Это значит, что в состоянии относительного покоя результирующее ускорение массовых сил перпендикулярно к соответствующему элементу поверхности равного давления.

5-2. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, движущемся по наклонной плоскости с ускорением

Рассмотрим объем жидкости, находящейся в покое относительно резервуара, движущегося с постоянным ускорением a по наклонной плоскости (фиг. 5-1), образующей с горизонтом угол α.

Фиг. 5-1. Резервуар с жидкостью движется поступательно.

В рассматриваемом случае силами, действующими в жидкости, будут силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного движения. Для любого элемента ускорение силы инерции $j = a$, но будет направлено в сторону, обратную ускорению резервуара a.

Результирующий вектор ускорений массовых сил — сил тяжести и сил инерции — определится диагональю параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести g и ускорении силы инерции j.

Элемент поверхности равного давления должен быть перпендикулярен к диагонали параллелограмма и образовывать с горизонтом угол β, тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{j\cos\alpha}{g - j\sin\alpha}. \qquad (5\text{-}3)$$

Таким образом, поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, образуют семейство параллельных плоскостей с углом наклона к горизонту β.

Если резервуар движется с постоянной скоростью ($a = 0$)

$$\operatorname{tg}\beta = 0,$$

$$\beta = 0.$$

В этом случае поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, представляют собой горизонтальные плоскости.

В том случае, если резервуар спускается только под действием силы тяжести (сила трения резервуара о плоскость равна нулю),

$$j = g\sin\alpha, \ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha, \ \beta = \alpha,$$

откуда следует, что поверхности равного давления образуют семейство плоскостей, параллельных плоскости скатывания.

Если резервуар спускается с ускорением, но вертикально ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

$$\operatorname{tg}\beta = 0,\ \beta = 0,$$

откуда следует, что поверхности равного давления образуют семейство горизонтальных плоскостей.

Найдем закон распределения давлений в вертикальной плоскости $x = \text{const}$. Для этого воспользуемся уравнением (5-1). Поскольку $Y = 0$, а для выбранной плоскости также и $dx = 0$, получим:

$$\rho Z dz = dp$$

Заметим, что оси координат, показанные на фиг. 5-1, следует рассматривать движущимися вместе с резервуаром и что координаты частиц объема x, y и z, входящие в уравнение (5-1), являются относительными.

Так как для оси z, параллельной силе тяжести,

$$Z = j\sin\alpha - g,$$

будем иметь

$$\rho(j\sin\alpha - g)dz = dp,$$

откуда

$$z + \frac{p}{\rho(g - j\sin\alpha)} = \text{idem}$$

Для двух частиц 0 и 1 с ординатами z_0 и z_1, расположенных в вертикальной плоскости, имеем:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho(g - j\sin\alpha)} = z_1 + \frac{p_1}{\rho(g - j\sin\alpha)},$$

или

$$p_1 = p_0 + \rho(g - j\sin\alpha)h \qquad (5\text{-}4)$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, позволяют получить уравнение для распределения давления в горизонтальной плоскости в виде

$$p_2 = p_0 + \rho j\cos\alpha\xi. \qquad (5\text{-}5)$$

При $\alpha = 0$

$$p_1 = p_0 + \gamma h,$$
$$p_2 = p_0 + \rho j\xi.$$

Теперь свободная поверхность имеет угол наклона к горизонту согласно формуле (5-3), равный

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{j}{g}$$

Заметим, что при $a = g$, т. е. когда резервуар свободно опускается вниз, $p_1 = p_2 = p_0$. Это значит, что во всем объеме жидкости давление имеет одно и то же значение.

Аналогично задача может быть решена и для иного направления движения, а также ускорения. Отметим, например, что все предыдущие выражения целиком сохранились бы, если бы резервуар поднимался, но равнозамедленно с ускорением a.

5-3. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

Рассмотрим объем жидкости, находящейся в покое относительно круглого цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω (фиг. 5-2).

В рассматриваемом случае, так же как и в предыдущем, силами, действующими в жидкости, будут силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного движения. Траектории любой частицы жидкости суть окружности с центрами на оси вращения. Ускорения их — центростремительные, определяются по формуле

$$a = r\Omega^2 = \sqrt{x^2 + y^2}\,\Omega^2, \qquad (5\text{-}6)$$

где r — расстояние данной частицы от оси вращения.

Для той же частицы ускорение силы инерции будет центробежным, равно $j = \sqrt{x^2 + y^2}\,\Omega^2$ и направлено в сторону, противоположную a.

Результирующий вектор ускорений массовых сил (сил тяжести и сил инерции) определяется диагональю параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести g и ускорении силы инерции j.

Фиг. 5-2. Резервуар с жидкостью вращается

Элемент поверхности равного давления будет перпендикулярен к диагонали параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести и ускорении силы инерции.

Для аналитического определения поверхности равного давления выберем относительные оси координат, как показано на фиг. 5-2.

Воспользуемся уравнением (5-2)

В рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned} X &= j\cos\alpha = r\Omega^2\cos\alpha = x\Omega^2;\\ Y &= j\sin\alpha = r\Omega^2\sin\alpha = y\Omega^2;\\ Z &= -g. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}7)$$

Подставляя значения X, Y и Z в уравнение (5-2) и интегрируя, получим

$$\frac{\Omega^2}{2g}(x^2+y^2) - z = C. \qquad (5\text{-}8)$$

Таким образом, *поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, образуют семейство параболоидов вращения, сдвинутых вдоль вертикальной оси.* Каждому значению p соответствует свой параболоид, характеризующийся некоторым значением постоянной C.

Постоянную интегрирования для параболоида свободной поверхности можно определить, принимая, что при $z = z_0$ (фиг. 5-2) $x = y = 0$, откуда $C = -z_0$.

Этому значению C соответствует уравнение свободной поверхности в виде:

$$\frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) = g(z-z_0) = gh_0$$

или

$$\frac{u^2}{2g} = h_0, \qquad (5\text{-}9)$$

где $u = \Omega r$ — скорость частицы в переносном движении,
h_0 — высота частицы, расположенной на свободной поверхности над уровнем z_0.

Найдем закон распределения давления по объему. Для этого воспользуемся уравнением (5-1) и подставим в него значения X, Y и Z согласно формулам (5-7). После интегрирования получим:

$$p = \gamma\left(\frac{u^2}{2g} - z\right) + C. \qquad (5\text{-}10)$$

Для

$$z = z_0 \text{ и } u = 0 \text{ должно быть } p = p_0,$$

поэтому из уравнения (5-10) находим:

$$C = p_0 + \gamma z_0,$$

и для давления в любой точке получаем следующую формулу:

$$p = p_0 + \gamma\left[(z_0 - z) + \frac{u^2}{2g}\right]. \qquad (5\text{-}11)$$

Для частиц, расположенных на одной вертикали, имеем:

$$p = p_0 + \gamma h, \qquad (5\text{-}12)$$

где

$$h = z_0 + h_0 - z,$$

т. е. в *рассматриваемом случае по вертикали существует обычный гидростатический закон распределения давления. Но здесь необходимо иметь в виду, что глубину погружения точки h надо исчислять от свободной поверхности, устанавливающейся при движении.*

Задача 5-1. При отливке чугунного бандажа для колеса в целях придания чугуну большей плотности опока (фиг. 5-3), залитая чугуном, приводится во вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\Omega = 20\pi$ 1 сек, что соответствует 600 об/мин. Определить давление в точке m, если дано. $D = 900$ *мм*; $h = 200$ *мм*; $\gamma = 7\,000$ *кГ/м³*

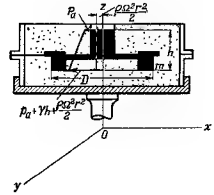
Решение. Для определения давления в точке m воспользуемся уравнением (5-11), в котором p_0 — давление на свободной поверхности в литнике, принимается за атмосферное, $z_0 - z = h$.

Таким образом, будем иметь

$$p_m = p_{am} + \gamma h + \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$p_m = 10\,000 + 7\,000\cdot 0{,}2 + \frac{7\,000\cdot 400\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}9^2}{9{,}81\cdot 8} = 295\,600 \text{ кГ/м}^2 = 29{,}66 \text{ кГ/см}^2$$



Фиг. 5-3. Центробежное литье. К задаче 5-1.

Следует обратить внимание на закон распределения давления. В этом уравнении первые два члена определяют гидростатическое давление в покоящейся жидкости. Давление, обусловливаемое вращением жидкости, определяется последним членом.

Задача 5-2. Жидкостный тахометр. Основной деталью жидкостного тахометра (фиг. 5-4) является диск *1*, приводящийся во вращение гибким валом *2*. Диск увлекает во вращение жидкость (масло) в полости *3*, куда она поступает из полости *4* через радиальный канал втулки *5*, осевой канал *6* и радиальный канал *7* диска *1*. Создающееся в жидкости, находящейся в полости *3*, давление измеряется пьезометром *8*.

Требуется установить зависимость между числом оборотов диска и показанием пьезометра.

Полость *4* через отверстие в пробке *9* сообщается с атмосферой, поэтому избыточное давление в жидкости, заполняющей канал диска на его оси, будет равно.

$$p_0 = \gamma h$$

Будем считать, что жидкость в полости *3* вращается с той же угловой скоростью Ω 1 сек, что и диск. В этом случае закон распределения избы

точного давления в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью диска, подчиняется формуле (5-1), а именно

$$p = \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \gamma h$$

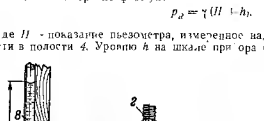
Для точки $r = R$

$$p_R = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} + \gamma h$$

С другой стороны, то же давление может быть определено посредством пьезометра по формуле

$$p_R = \gamma (H + h),$$

где H — показание пьезометра, измеренное над уровнем покоящейся жидкости в полости 4. Уровню h на шкале прибора соответствует нуль.



Фиг 5-4. Жидкостный тахометр К задаче 5 2

Приравнивая обе формулы для p_R, получим

$$\Omega^2 = \frac{2gH}{R^2} \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2,$$

откуда число оборотов диска в минуту

$$n = \frac{30}{\pi R} \cdot \sqrt{2gH} \text{ [об/мин]},$$

а для линейных размеров в метрах $\sqrt{g} = \sqrt{\pi}$

$$n = \frac{42{,}3}{R} \cdot \sqrt{H} = C\sqrt{H},$$

где $C = \frac{42{,}3}{R}$ — теоретическое значение постоянной прибора.

Учитывая сделанное выше допущение о движении жидкости в полости 3, значение C, соответствующее различным жидкостям, температурам, а также различным значениям n, лучше всего определить опытным путем, произведя тарировку тахометра.

Задача 5-3. Вертикальный вал имеет поршень для сбора масла, поступающего из подшипника (фиг. 5-5). Определить, на каком минимальном расстоянии от оси вала следует просверлить отверстие в дне поддона, чтобы масло могло стекать в маслосборник.

Заданными величинами следует считать n — число оборотов вала в минуту — и верхнюю точку параболы A как предел наполнения масла в поддона, координируемую величинами r_A и h, точка B отвечает пересечению параболы с дном поддона и определяет то минимальное расстояние от оси r_B, которое необходимо для сверления отверстия.

Решение. Из формулы (5-9) расстояние по вертикали между двумя точками свободной поверхности

$$h = \frac{\Omega^2 r_A^2}{2g} - \frac{\Omega^2 r_B^2}{2g},$$

отсюда определим r_B:

$$r_B = \sqrt{\frac{\Omega^2 r_A^2 - 2gh}{\Omega^2}} = \sqrt{r_A^2 - \frac{2gh}{\Omega^2}},$$

так как угловая скорость

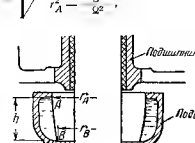
$$\Omega = \frac{\pi n}{30},$$

то выражение для r_B примет вид

$$r_B = \sqrt{r_A^2 - \frac{2gh30^2}{\pi^2 n^2}},$$

для метровых размеров $\pi^2 = g$, поэтому

$$r_B = \sqrt{r_A^2 - \frac{1\,800h}{n^2}}.$$



Фиг. 5 5. Маслосборник. К задаче 5-3.

При $n = 300$ об/мин, $r_A = 0{,}4$ м, $h = 0{,}2$ м:

$$r_B = \sqrt{0{,}16 - \frac{1\,800 \cdot 0{,}2}{90\,000}} = 0{,}395 \text{ м}$$

В данном случае для участка параболы между точками A и B имеем почти вертикальное положение.

5-4. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг горизонтальной оси

Исследуемый случай, например, имеет место при определении осевого усилия в центробежном насосе (фиг. 5 6), в котором жидкость, заполняющая боковое пространство C в корпусе насоса, рассматривается вращающейся как твердое тело, т. е. находится в относительном покое.

Найдем закон распределения давления в жидкости, заполняющей пространство C. Для указанной цели воспользуемся дифференциальным уравнением (5-1). Рассмотрим некоторую частицу m, которая находится на расстоянии r от оси вращения и радиус вращения которой образует с осью y угол α:

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp,$$

где X, Y, Z — проекции на оси координат ускорения равнодействующей объемных сил, каковыми в данном случае будут являться сила тяжести и центробежная сила инерции переносного движения.

Найдем их проекции на оси координат:

$$X = 0,\ Y = r\Omega^2 \cos\alpha;\ Z = -g + r\Omega^2 \sin\alpha.$$

Так как $r\cos\alpha = y$ и $r\sin\alpha = z$, где y и z — относительные координаты, то

$$X = 0;\ Y = y\Omega^2;\ Z = -g + z\Omega^2.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$dp = \rho\,[\Omega^2(z\,dz + y\,dy) - g\,dz].$$

Интегрируя, находим закон распределения давления:

$$p = \rho\left[\frac{\Omega^2}{2}(z^2 + y^2) - gz\right] + C.$$

Если пренебречь влиянием веса жидкости, для закона распределения давления p получим следующее выражение:

$$p = \rho\,\frac{\Omega^2}{2}(z^2 + y^2) + C,$$

или

$$p = \rho\,\frac{\Omega^2 r^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования C определим по давлению p_2, развиваемому насосом по выходе жидкости из рабочего колеса на окружности радиусом r_2.

Полагая $r = r_2$ и $p = p_2$, найдем:

$$C = p_2 - \rho\,\frac{\Omega^2 r_2^2}{2}.$$

Таким образом, закон распределения давления выразится следующей формулой:

$$p = p_2 - \frac{\rho\Omega^2}{2}(r_2^2 - r^2).$$

Этой формуле соответствует эпюра давлений, изображенная на фиг. 5-7.

Поверхность давлений представляет собой параболоид вращения с осью, совпадающей с осью вращения насоса (вала).

В заключение определим поверхности равного давления. Для указанной цели воспользуемся уравнением (5-2). Подставляя в него значения X, Y, Z и производя интегрирование, получим уравнение поверхности равного давления:

$$\frac{\Omega^2}{2}(z^2 + y^2) - gz = C.$$

Это уравнение может быть приведено к виду:

$$y^2 + \left(z - \frac{g}{\Omega^2}\right)^2 = C_1.$$

Таким образом, поверхности равного давления образуют семейство концентрических круглых цилиндров с осью, параллельной оси и сдвинутой по оси z вверх на расстояние g/Ω^2.

Если пренебречь весом жидкости, то для поверхности равного давления получим выражение:

$$\frac{\Omega^2}{2}(z^2 + y^2) = C_1,$$

т. е. в этом случае поверхность изобразится также круглыми цилиндрами, но с осью, совпадающей с осью x.

Фиг. 5-6. Схематичный разрез колеса центробежного насоса. К задаче 5-4.

Фиг. 5-7 Эпюра давлений. К задаче 5-4.

Задача 5-4. Осевое усилие в центробежном насосе. Жидкость, заполняющая пространства C и увлекаемая рабочим колесом B центробежного насоса (фиг. 5-6), оказывает давление на боковые поверхности a и b рабочего колеса, благодаря чему в осевом направлении возникает усилие, сдвигающее рабочее колесо. Требуется определить это горизонтальное усилие согласно следующим данным: $r_2 = 154$ *мм*; $r_1 = 77$ *мм*; $r_4 = 30$ *мм*; $\Omega_0 = 152$ 1 *сек.*; $p_2 = 2{,}3$ *кГ/см*^{2}.

При решении задачи делаем три допущения:

1. Считаем, что вся масса жидкости в пространстве C вращается как твердое тело с угловой скоростью Ω, равной половине угловой скорости рабочего колеса насоса B:

$$\Omega = 0{,}5\Omega_0$$

2. Считаем, что дросселирующее влияние зазора n у выхода из рабочего колеса невелико, благодаря чему давление у зазора в пространстве C равно давлению p_2, развиваемому насосом по выходе из рабочего колеса.

3. Считаем, что в пространстве C с обеих сторон рабочего колеса действует один и тот же закон распределения давлений.

Так как мы принимаем, что закон распределения давлений с обеих сторон рабочего колеса одинаков, то результирующей силой осевого давления будет сила давления на кольцевую поверхность с радиусом r_1 и r_4.

Соответствующая область эпюры давлений заштрихована на фиг. 5-7.

Для определения результирующего осевого усилия разобьем площадь

кольца на элементарные кольцевые площадки $d\omega = 2\pi r dr$ и вычислим интеграл.

$$P(кГ) = \int_{r_в}^{r_1} p d\omega = \int_{r_в}^{r_1} \left[p_2 - \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r^2) \right] 2\pi r dr$$

После интегрирования получим:

$$P(кГ) = \pi(r_1^2 - r_в^2)\left[p_2 - \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_2^2 - \frac{r_1^2 + r_в^2}{2} \right) \right].$$

Подставляя данные и принимая для воды $\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1\,000}{9{,}81} = 102\ кГ \cdot сек^2/м^4$,

найдем

$$P = \pi(0{,}077^2 - 0{,}030^2)\left[23\,000 - \frac{102 \cdot 76^2}{2} \cdot \left(0{,}154^2 - \frac{0{,}077^2 + 0{,}030^2}{2} \right) \right] = 270{,}15\ кГ.$$

Глава шестая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАВАНИЯ

Приводимый здесь материал в основном излагается по работе выдающегося русского ученого акад. А. Н. Крылова «Теория корабля». В этой главе освещаются вопросы, относящиеся лишь к одному разделу этой теории, а именно к остойчивости плавающего тела, огромная роль в исследовании которой принадлежит Л. Эйлеру. Такие вопросы теории корабля, как качка корабля, поворотливость, вибрация, теория непотопляемости и ряд других, которые были разработаны академиком А. Н. Крыловым и создали мировую славу их автору и всей русской школе по «теории корабля», здесь не затрагиваются, как выходящие за пределы программы курса гидравлики. Некоторые вопросы о сопротивлении жидкости движущимся телам будут изложены в гл. 22.

6-1. Основные определения. Закон Архимеда

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, называемая поддерживающей силой, направленная вверх и равная весу вытесненной им жидкости.

Поддерживающая сила является равнодействующей сил давления, с которыми жидкость, находящаяся в покое, действует на покоящееся в ней тело.

Для определения поддерживающей силы разобьем поверхность плавающего тела на верхнюю и нижнюю части и определим давление жидкости на каждую из частей. Так как в общем случае поверхность тела может быть криволинейной, то каждая из сил может оказаться расположенной в пространстве. Разложим эти силы и определим сначала их вертикальные составляющие P_{1z} и P_{2z} (фиг. 6-1)

Вертикальная составляющая P_{1z} будет направлена вниз и согласно формуле (4-43) равна:

$$P_{1z} = p_{am}\omega_1 + \gamma W_1, \qquad (6\text{-}1)$$

где ω_1 — проекция на горизонтальную плоскость площади поверхности верхней части тела, а W_1 — объем тела давления, соответствующий ей.

Вертикальная составляющая P_{2z} будет направлена вверх и равна:

$$P_{2z} = p_{am}\omega_2 + \gamma W_2, \qquad (6\text{-}2)$$

где $\omega_2 = \omega_1$ и W_2 имеют тот же смысл, что и раньше, но соответствуют нижней части поверхности тела, причем

$$W_2 = W_1 + W, \qquad (6\text{-}3)$$

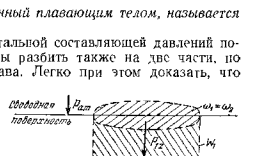
а W — объем тела, равный объему вытесненной телом жидкости.

Поддерживающая сила равна разности вертикальных составляющих

$$P = P_{2z} - P_{1z} = \gamma W. \qquad (6\text{-}4)$$

Объем жидкости, вытесненный плавающим телом, называется объемным водоизмещением.

Для определения горизонтальной составляющей давлений поверхность тела надо было бы разбить также на две части, расположенные слева и справа. Легко при этом доказать, что горизонтальные составляющие взаимно уравновешиваются. Таким образом, давление жидкости на плавающее тело приводится только к одной поддерживающей силе.



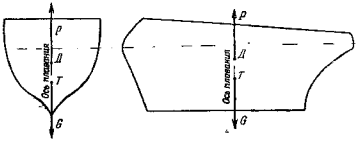
Фиг 6-1. Поддерживающая сила приложена в центре тяжести вытесненного объема — в центре водоизмещения.

Линия действия поддерживающей силы проходит через центр тяжести вытесненного объема жидкости, который называется центром водоизмещения или центром давления $Д$. Обычно принято считать, что поддерживающая сила приложена в центре водоизмещения.

В общем случае центр водоизмещения $Д$ (фиг. 6-2, 6-3) не совпадает с центром тяжести T плавающего тела. Оба эти центра в нормальном положении плавающего тела располагаются на вертикальной оси, которая называется осью плавания.

Тело тонет, если вес тела G больше величины поддерживающей силы P. Тело всплывает на поверхность, если вес тела G меньше поддерживающей силы P.

При всплывании тела на поверхность вместе с уменьшением объема жидкости, вытесняемого телом, будет уменьшаться и ве-

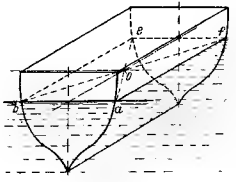


Фиг. 6.2. Центр тяжести T и центр водоизмещения $Д$ расположены на оси плавания.

Фиг. 6-3. Центр тяжести расположен ниже центра водоизмещения.

личина поддерживающей силы. Тело будет плавать на поверхности, если поддерживающая сила сделается равной весу тела, т. е. $P = G$.

Равенство поддерживающей силы и веса тела необходимо также и для того, чтобы тело плавало на любой глубине (например, подводная лодка).



Фиг. 6-4. Площадь $abef$ — площадь ватерлинии.

Плоскость свободной поверхности жидкости, пересекающая плавающее тело, называется плоскостью плавания.

Периметр сечения плавающего тела плоскостью плавания (линия $abef$ — фиг. 6 4) называется ватерлинией.

Площадь, ограниченная ватерлинией, называется площадью ватерлинии.

Пловучестью тела называется его способность плавать при заданном весе. Мерой пловучести плавающего тела является водоизмещение.

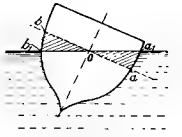
Плавающее тело должно обладать запасом пловучести; запасом пловучести называют допустимую перегрузку плавающего тела, при которой оно еще не пойдет ко дну. Запас пловучести зависит от высоты надводного борта и устанавливается законоположениями.

6-2. Теорема Эйлера о крене

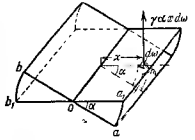
Л. Эйлером была доказана следующая теорема.

При крене плавающего тела вокруг горизонтальной оси на бесконечно малый угол, при котором не изменяется величина поддерживающей силы, две смежные площади ватерлиний пересекаются по прямой, проходящей через центр тяжести площади ватерлинии, соответствующей данному положению.

В самом деле, в обоих положениях тела поддерживающая сила сохраняет постоянную величину, равную весу тела. Отсюда следует, что величина объема жидкости, вытесненного телом, в том и другом случае одна и та же. Изменяется лишь форма вытесненного объема. Объем увеличивается (фиг. 6-5) на клинообразную заштрихованную часть справа (oaa_1) и уменьшается



Фиг. 6-5. Клинообразные объемы равны друг другу.



Фиг. 6-6. При малом крене $\alpha = \sin\alpha$.

на клинообразную заштрихованную часть слева (obb_1). Поэтому увеличение поддерживающей силы справа будет равняться уменьшению поддерживающей силы слева, откуда следует, что заштрихованные клинообразные объемы слева и справа должны быть равны между собой. Вычислим эти объемы (фиг. 6-6). Клинообразный объем справа или слева будет равен сумме элементарных объемов. Каждый из элементарных объемов может быть принят за объем бесконечно малого цилиндра, имеющего основанием $d\omega$ в плоскости ватерлинии и высоту $h_1 = x\alpha$.

Объем справа будет равен:

$$W_1 = \int_1 h_1 d\omega = \int_1 x\alpha d\omega.$$

Объем слева будет равен:

$$W_2 = \int_2 h_1 d\omega = \int_2 x\alpha d\omega.$$

Так как объемы равны, т. е. $W_1 = W_2$, то

$$\int_1 x\alpha d\omega = \int_2 x\alpha d\omega.$$

Сокращая на α, получаем:

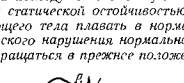
$$\int_1 x d\omega + \int_2 x d\omega = 0. \qquad (6\text{-}5)$$

Из формулы (6-5) следует, что статический момент площади ватерлинии относительно линии пересечения двух смежных площадей равен нулю, а это значит, что линия пересечения проходит через центр тяжести площади ватерлинии, соответствующей данному положению.

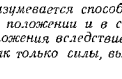
6-3. Статическая остойчивость

Каждое плавающее тело должно обладать остойчивостью. При этом различают остойчивость статическую и динамическую. Сначала исследуем статическую остойчивость.

Под статической остойчивостью подразумевается способность плавающего тела плавать в нормальном положении и в случае статического нарушения нормального положения вследствие крена возвращаться в прежнее положение, как только силы, вызвав-



Фиг. 6-7. При крене центр водоизмещения перемещается по линии центров водоизмещения.



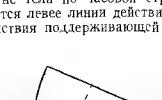
Фиг. 6-8. Точка M — метацентр. Тело остойчиво.

щие крен, прекратят свое действие При статическом нарушении нормального положения силы, действующие на тело, находятся практически в равновесии и скорость тела равна практически нулю.

При исследовании остойчивости необходимо иметь в виду, что при крене твердого плавающего тела его центр тяжести является всегда одной и той же точкой (случай, когда на плавающем теле находится жидкий груз, здесь не рассматривается). Центр же водоизмещения вследствие того, что изменяется форма объема вытесненной телом жидкости, перемещается по линии, называемой линией центров водоизмещения (фиг. 6-7), поэтому при крене плавающего тела сила тяжести и равная ей по величине поддерживающая сила всегда создают пару сил. Для того чтобы тело обладало статической остойчивостью, необходимо, чтобы эта пара сил стремилась возвратить тело в нормальное положение. Это, например, будет иметь место во всех случаях, когда центр водоизмещения расположен выше центра тяжести (фиг. 6-8). Но в большинстве случаев центр водоизмещения расположен ниже центра тяжести (фиг. 6-7, 6-9). Здесь могут представиться два случая.

Первый случай — устойчивое равновесие (фиг. 6-7). При крене тела по часовой стрелке центр водоизмещения располагается правее линии действия силы тяжести. В этом случае линия действия поддерживающей силы P пересекает ось плавания в точке M, расположенной выше центра тяжести. Создающаяся при этом пара $(P_1 - G)$ стремится возвратить тело в положение равновесия.

Второй случай — неустойчивое равновесие (фиг. 6-9). При крене тела по часовой стрелке центр водоизмещения располагается левее линии действия силы тяжести. В этом случае линия действия поддерживающей силы P_1 пересекает ось плавания в



Фиг. 6-9. Точка M — метацентр. Тело не остойчиво.

Фиг. 6-10. Точка M — метацентр. Тело остойчиво.

точке M, расположенной ниже центра тяжести. Создающаяся при этом пара $(P_1 - G)$ стремится опрокинуть тело.

Точка M пересечения линии действия поддерживающей силы с осью плавания при малых углах крена называется начальным метацентром.

Расстояние H_0 от начального метацентра до центра тяжести плавающего тела называется начальной метацентрической высотой (фиг. 6-10). Расстояние $H_0 + h$ от начального метацентра до центра водоизмещения называется начальным метацентрическим радиусом. В общем случае крена, т. е. при больших углах крена, метацентрический радиус следует рассматривать как радиус кривизны линии центров водоизмещения, а метацентр как центр кривизны этой линии, причем при больших углах крена метацентр уже не расположен на оси плавания.

Из сказанного следует, что для того, чтобы тело обладало статической остойчивостью, необходимо, чтобы метацентр находился выше центра тяжести, т. е. чтобы метацентрическая высота H_0 была положительна.

Выразим это условие для начального метацентра аналитически.

Поддерживающую силу P_1, соответствующую крену, приложенную в точке $Д_1$, можно рассматривать как равнодей-

ствующую поддерживающей силы нормального положения (численно равной P_1) и двух дополнительных сил, возникших в результате погружения клинообразного объема справа (положительная поддерживающая сила $\delta P^{(+)}$) и выхода из жидкости клинообразного объема слева (отрицательная поддерживающая сила $\delta P^{(-)}$). Оба клинообразных объема на фиг. 6-10 заштрихованы. Поэтому сумма моментов сил P, $\delta P^{(+)}$ и $\delta P^{(-)}$ должна равняться моменту силы P_1.

Моменты сил P и P_1 вычислим относительно центра водоизмещения $Д$. Момент сил $\delta P^{(+)}$ и $\delta P^{(-)}$ можно вычислять относительно любой оси (в данном случае относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести площади ватерлинии — точку 0), так как эти силы образуют пару. Но момент силы P относительно центра водоизмещения $Д$ равен нулю. Поэтому момент силы P_1 должен быть равен моменту M пары $\delta P^{(+)}$ и $\delta P^{(-)}$, т. е.

$$P_1(H_м + h)\sin\alpha = M. \qquad (6\text{-}6)$$

Момент M равен сумме моментов элементарных поддерживающих сил (фиг. 6-6 и 6-10) элементарных объемов, образованных бесконечно малыми цилиндрами, имеющими основанием $d\omega$ (в плоскости ватерлинии) и высоту $h_1 = x\alpha$.

Момент элементарной поддерживающей силы равен произведению элементарной поддерживающей силы на плечо x. Так как элементарная сила равна произведению объемного веса жидкости на элементарный объем, равный, как уже было найдено раньше, $x\alpha d\omega$, то элементарный момент будет равен:

$$dM = \gamma x\alpha d\omega x = \gamma\alpha x^2 d\omega,$$

$$M = \int_\omega \gamma\alpha x^2 d\omega = \gamma\alpha \int_\omega x^2 d\omega = \gamma\alpha J, \qquad (6\text{-}7)$$

где $J = \int_\omega x^2 d\omega$ — момент инерции площади ватерлинии относительно оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Таким образом,

$$P(H_м + h)\sin\alpha = \gamma\alpha J. \qquad (6\text{-}8)$$

Принимая попрежнему для малых углов $\sin\alpha = \alpha$ и учитывая, что $P = \gamma W$, получим для метацентрической высоты $H_м$ следующее выражение:

$$H_м = \frac{J}{W} - h, \qquad (6\text{-}9)$$

где W — объемное водоизмещение. Для случая, когда центр водоизмещения расположен выше центра тяжести, величина h

отрицательна; при вычитании отрицательной величины $H_м$ получается всегда положительная.

Метацентрическая высота может быть положительной — в этом случае равновесие плавающего тела устойчивое, равна нулю — равновесие плавающего тела безразличное, отрицательной — равновесие неустойчивое.

Зная метацентрическую высоту, легко определить и момент пары $(P_1 - G)$, стремящийся возвратить повернутое плавающее тело в положение равновесия, т. е. определить восстанавливающий момент (метацентрический момент),

$$M_м = PH_м \sin\alpha = P\left(\frac{J}{W} \pm h\right)\sin\alpha. \qquad (6\text{-}10)$$

Эта формула называется метацентрической формулой остойчивости.

Следует подчеркнуть, что формула (6-10) справедлива как для крена относительно продольной оси, так и относительно поперечной оси. Для каждого из этих случаев в формулу необходимо подставить соответствующее значение момента инерции площади ватерлинии.

При крене относительно продольной оси соответствующий этому метацентр называется поперечным, а при крене относительно поперечной оси — продольным.

Степень точности формулы остойчивости зависит от формы плавающего тела и пользоваться ею при значительных углах крена надо осторожно. Акад. А. Н. Крылов считал крен еще малым, если он не превышает 15—20° для высокобортных судов, а для низкобортных судов, — пока кромка палубы не погрузится в воду. Для этих углов положение метацентра практически остается постоянным.

Из предыдущего следует, что при проектировании плавающего тела необходимо добиться того, чтобы метацентрическая высота была положительна при всяких возможных условиях плавания.

Увеличения метацентрической высоты можно достичь уширением корпуса плавающего тела в области ватерлинии путем установки специальных плавников или понижением центра тяжести устройством утяжеленного киля.

В зависимости от назначения плавающего тела для поперечной метацентрической высоты ориентировочно можно указать следующие значения:

а) для небольших судов типа буксиров $H_м = 0{,}3 \div 0{,}6$ *м*;

б) для коммерческих судов $H_м = 0{,}5 \div 1{,}2$ *м*,

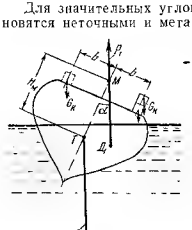
в) для боевых кораблей $H_м = 1 \div 1{,}5$ *м*.

Необходимо отметить, что изменение веса плавающего тела влияет на остойчивость, а также то, что наличие жидкого груза,

который при крене может переливаться, вызывает уменьшение остойчивости.

Для значительных углов крена формулы (6-9) и (6 10) становятся неточными и метацентрический момент $M_м$ будет более сложной функцией угла крена

$$M_м = M(\alpha). \qquad (6\ 11)$$



Фиг. 6-11. Схема сил, действующих на тело, выведенное из положения равновесия

Зависимость метацентрического момента от угла крена можно установить экспериментально. Для этой цели помещают на равных расстояниях от оси плавания два одинаковых груза каждый весом $G_к$ (фиг. 6-11).

Затем переносят, например, груз $G_к$ слева к грузу $G_к$ справа. Это будет равносильно приложению к плавающему телу пары сил, создающей крен, момент которой равен:

$$M_к = 2G_к b \cos\alpha.$$

Плавающее тело, получив крен на угол α, займет некоторое положение равновесия.

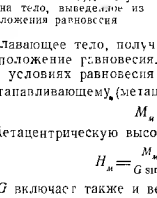
В условиях равновесия момент $M_к$ должен быть равен восстанавливающему (метацентрическому) моменту $M_м$:

$$M_м = 2G_к b \cos\alpha. \qquad (6\text{-}12)$$

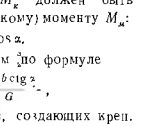
Метацентрическую высоту найдем по формуле

$$H_м = \frac{M_м}{G \sin\alpha} = \frac{2G_к b \operatorname{ctg}\alpha}{G}, \qquad (6\text{-}13)$$

где G включает также и вес грузов, создающих крен.



Фиг. 6 12 В положении максимального угла крена площадь $A_2 = A_1$



Фиг. 6-13 В положении максимального угла крена площадь $A_2 = A_1$.

Повторив этот опыт несколько раз для различных значений $G_к$, можно построить зависимости $M_м$ и $H_м$ от угла крена α.

На фиг. 6 12 показана форма кривой $M_м$.

Формулой (6-13) можно пользоваться также и для определения центра тяжести плавающего тела, если ранее, например, аналитически был найден метацентр[1].

6-4. Динамическая остойчивость

Динамической остойчивостью называется способность плавающего тела совершать колебания под действием сил, создающих кренящие моменты, в пределах заданных углов крена.

Законы изменения кренящих моментов $M_к$ весьма разнообразны. На фиг. 6-12 и 6-13 показаны два частных случая. Под действием сил тело получит перемещение, которое разложим на вращательное вокруг оси, проходящей через центр соответствующей площади ватерлинии, и на поступательное вместе с ней. Для исследования остойчивости важным является только вращательная часть перемещения.

В рассматриваемом случае в отличие от статического кренящие моменты $M_к$ не равны восстанавливающим $M_м$. Поэтому при незначительных углах крена, когда восстанавливающий момент $M_м$ меньше $M_к$, тело будет крениться с возрастающей угловой скоростью. Увеличение угловой скорости (разгон) будет происходить до угла крена α_p, при котором $M_м = M_к$. В этом положении плавающее тело приобретет максимальную угловую скорость. При дальнейшем увеличении угла крена восстанавливающий момент становится больше $M_к$ и вращение плавающего тела станет замедленным. Крен на мгновение прекратится при некотором угле $\alpha_{макс}$, после чего плавающее тело начнет вращаться в обратном направлении.

Если бы силы трения отсутствовали, то плавающее тело колебалось бы в ту и другую сторону бесконечно. Благодаря силам трения колебания являются затухающими. При остановке крен тела будет соответствовать углу α_p.

Чтобы определить максимальный угол крена $\alpha_{макс}$, заметим, что диаграмму моментов можно рассматривать как диаграмму работ, совершаемых моментами $M_м$ и $M_к$ при кренс. Будем считать работу $M_к$ положительной, а работу $M_м$ — отрицательной.

[1] Собрание трудов акад А. Н. Крылова, т. IX, ч. 2, .949

За время крена от угла $\alpha = 0$ до угла α_p суммарная работа $A_1 = \int_0^{\alpha_p} (M_к - M_м) d\alpha$ будет положительной; на диаграмме работы A_1 изображается площадью A и затрачивается на сообщение плавающему телу кинетической энергии. За время крена от угла α_p до угла $\alpha_{макс}$ суммарная работа A_2 — отрицательная, что вызывает уменьшение ранее накопленной кинетической энергии. На диаграмме эта работа изображается площадью A_2. Очевидно, крен достигает максимума при угле $\alpha_{макс}$, при котором

$$A_1 = A_2.$$

Максимальный угол крена $\alpha_{макс}$ не должен превосходить допускаемого $\alpha_{доп}$, значение которого устанавливается техническими условиями. В этом случае будем считать, что тело при заданном кренящем моменте $M_к$ обладает динамической остойчивостью. Чем больше площадь A = пл. (abb_1), ограниченная углом α_p и $\alpha_{доп}$, по сравнению с площадью $A_2 = A_1$, тем большей динамической остойчивостью обладает плавающее тело. Отношение $\frac{A}{A_1} = \varepsilon$ называется относительным запасом динамической остойчивости. Если бы при кренящем моменте, изображенном на фиг. 6-12, при первом размахе крен превзошел угол $\alpha_{макс\ доп}$, то плавающее тело опрокинулось бы (соотношение площадей на фигуре этому случаю не соответствует).

Задача 6-1. Определить глубину погружения плавающего танка, допуская, что центр тяжести танка T и центр водоизмещения $Д$ расположены на оси плавания 00. Вес танка $G = 2\,925$ *кГ*; ширина танка $b = 2$ *м*; $R = 1{,}25$ *м*, $a = 2$ *м*.

Решение. Применяя основную формулу плавания, согласно которой вес танка равен подъемной силе, т. е.

$$G = P = \gamma W,$$

определяем объемное водоизмещение:

$$W = \frac{G}{\gamma} = \frac{2\,925}{1\,000} = 2{,}925 \text{ м}^3.$$

Но водоизмещение танка при принятых на чертеже обозначениях равно:

$$W = b\left[aR(1 - \cos\theta) + R\left(\frac{\theta R^2}{2} - \frac{R^2 \sin\theta \cos\theta}{2}\right)\right].$$

Заштрихованным на фиг. 6-14 объемом можно пренебречь. Из последнего уравнения методом подбора определим угол θ

$$\theta = 55°.$$

Зная угол θ, определим глубину погружения по формуле

$$h = R(1 - \cos\theta) = 1{,}25(1 - 0{,}574) = 0{,}533 \text{ м}.$$

Задача 6-2. Определить меньшую метацентрическую высоту $H_м$ плавающего танка для условия предыдущей задачи, полагая $l = 3$ *м*; $h_Д = 0{,}3$ *м* и $h_T = 0{,}4$ *м* (фиг. 6-14).

Фиг. 6-14. Плавающая машина. К задаче 6-1.

Решение. $H_м = \left(\frac{\gamma J}{G} - h\right)$, где J — момент инерции площади ватерлинии относительно оси xx, проходящей через центр тяжести площади ватерлинии.

$$J = \frac{lb^3}{12} = \frac{3 \cdot 8}{12} = 2 \text{ м}^4;\ h = h_T - h_Д = 0{,}1 \text{ м}.$$

Подставляя вычисленные значения J и h, находим:

$$H_м = \left(\frac{2}{2{,}925} - 0{,}1\right) = 0{,}584 \text{ м}.$$

Так как $H_м > 0$, танк обладает статической остойчивостью.

Задача 6-3. Определить начальный дифферент (начальный угол крена) плавающего танка согласно условию предыдущей задачи, полагая, что центр тяжести смещен вправо от оси 00 на расстояние $r = 0{,}2$ *м* (фиг. 6-15).

Решение. В положении равновесия момент пары сил $(P = G)$ должен быть равен метацентрическому моменту.

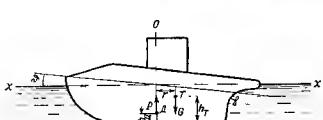
$$M = P\left(\frac{\gamma J}{P} - h\right)\sin\theta = Gr\cos\theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{\frac{\gamma J}{P} - h} = \frac{0{,}2}{1{,}44} = 0{,}139,$$

где J — момент инерции площади ватерлинии относительно ее поперечной оси, а

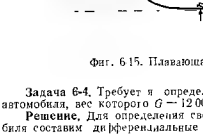
$$\theta = 7°55'.$$



Фиг. 6.15. Плавающая машина. К задаче 6.2.

Задача 6-4. Требуется определить свободные колебания плавающего автомобиля, вес которого $G = 12\,000$ *кГ*, а площадь ватерлинии $\omega = 18$ *м*².

Решение. Для определения свободных колебаний плавающего автомобиля составим дифференциальные уравнения этих колебаний, пренебрегая сопротивлением жидкости.



Фиг. 6.16. Колебание тела вызвано дополнительным погружением на z. К задаче 6-4.

При погружении плавающего тела на глубину z, большую той, которая соответствует равновесному положению автомобиля на воде, появляется дополнительная подъемная сила (фиг. 6.16) (силы трения не учитываем)

$$\delta P = \gamma\omega z,$$

где z — дополнительное погружение;
γ — объемный вес жидкости.

Знак „—" показывает, что сила δP направлена в сторону, противоположную z.

Дифференциальное уравнение колебательного движения автомобиля может быть представлено в виде

$$mz'' = -\gamma\omega z,$$

где z'' — вторая производная по времени от z;

$m = \frac{G}{g}$ — масса автомобиля.

Обозначим через

$$k^2 = \frac{\gamma\omega g}{G},$$

при этом будем иметь

$$z'' = -k^2 z$$

Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, частота которых

$$k = \sqrt{\frac{\gamma\omega g}{G}}.$$

Интеграл этих уравнений

$$z = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным данным.

Обозначая начальное дополнительное погружение через z_0, а начальную скорость колебания в этом положении $z_0 = 0$, найдем, что

$$C_1 = z_0, \text{ а } C_2 = 0$$

Таким образом, уравнение колебаний может быть представлено в виде:

$$z = z_0 \cos(kt).$$

Вычислим частоту свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{\gamma\omega g}{G}} = \sqrt{\frac{1\,000 \cdot 18 \cdot 9{,}81}{12\,000}} = 3{,}836 \text{ 1/сек.}$$

Период свободных колебаний

$$T_{свб} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3{,}836} = 1{,}637 \text{ сек.}$$

Задача 6-5. Требуется определить амплитуду H вынужденных колебаний плавающего автомобиля, вес которого $G = 12\,000$ *кГ*, а площадь ватерлинии $\omega = 18$ *м*². Вынужденные колебания создает волна, амплитуда которой (высота гребня) $h = 2$ *м*. Частота волны, измеренная в данном водохранилище,

$$k_1 = 4{,}087 \text{ 1/сек.};$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 1{,}537 \text{ сек.}$$

Такая волна создает возмущающую силу, максимальное значение которой равно $\delta P = \gamma\omega h$

Как известно из курса теоретической механики, амплитуда вынужденных колебаний вычисляется по формуле

$$H = \frac{\delta P}{m k^2 \left(\frac{k_1^2}{k^2} - 1\right)},$$

где k — частота свободных колебаний, а m — масса. Подставляя значение k из предыдущей задачи, получим:

$$H = \frac{h}{\frac{k_1^2}{k^2} - 1} = \frac{h}{\frac{T_{свб}^2}{T_1^2} - 1}.$$

Значение частоты и периода свободных колебаний было найдено в предыдущей задаче

$$k = 3{,}836 \text{ 1/сек.},$$

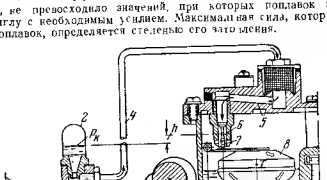
$$T_{свб} = 1{,}637 \text{ сек.}$$

Подставляя найденные значения, получим

$$H = \frac{2}{\left(\frac{1{,}637}{1{,}537}\right)^2 - 1} = \frac{2}{0{,}144} = 14{,}92 \text{ м}$$

Колебания почти соответствуют резонансу и являются недопустимыми.

Задача 6-6. Горючее (бензин) поступает (фиг 6 17) в поплавковую камеру *1* карбюратора из воздушного колпачка *2* диафрагменного насоса *3* по трубопроводу *4* через канал *5* и отверстие *6*, запирающееся иглой *7* поплавка *8* Для того чтобы поплавковая камера не переполнялась, необходимо, чтобы давление p_k, создаваемое насосом, в колпачке и передающееся на иглу *7*, не превосходило значений, при которых поплавок не сумеет прижать иглу с необходимым усилием. Максимальная сила, которую может развить поплавок, определяется степенью его затопления.



Фиг. 6-17. Поплавковое устройство К задаче 6-6

Требуется определить наибольшее допустимое давление в воздушном колпачке p_k согласно следующим данным: вес поплавка $G_п = 15$ *Г*; объем поплавка $W = 35$ *см*³, степень затопления поплавка $\eta = 75\%$ от его объема, вес иглы $G_и = 0{,}85$ *Г*; расстояние от уровня горючего в колпачке насоса до запорного отверстия $h = 34{,}5$ *см*; площадь запорного отверстия $\omega = 2{,}54$ *мм*²; расстояние от оси вращения поплавка до оси иглы $l_1 = 2{,}3$ *см*, до центра тяжести поплавка $l_2 = 3{,}2$ *см*, до центра водоизмещения поплавка $l_2 = 3{,}2$ *см*; объемный вес бензина $\gamma = 0{,}735$ *Г см*³.

Ответ $p_k = \frac{\gamma W \eta - G_п}{\omega} \cdot \frac{l_2}{l_1} + \gamma h - \frac{G_и}{\omega} = 0{,}235$ *кГ см*².

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГИДРОДИНАМИКА

Глава седьмая

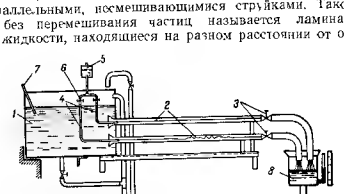
ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ

Основной задачей гидродинамики как части гидравлики является исследование закономерностей, характеризующих поток в целом. Однако выяснение различных факторов, влияющих на формирование потока, на диссипацию энергии в потоке и на связанную с ней проблему так называемых гидравлических сопротивлений и на многие другие явления, требует ясного представления о характере движения отдельных частиц.

7-1. Ламинарное и турбулентное движение

Некоторое общее представление о перемещении отдельных частиц дает наблюдение над потоком, в который вводятся или подкрашенная струйка жидкости, или специальные составы, образующие в жидкости пузырьки сферической формы (такие пузырьки, по плотности не отличающиеся от воды, образуют смесь хлорбензола с вазелиновым маслом и цинковыми белилами). Движение отдельных частиц в общем виде можно представить, а при небольших скоростях и проследить на приборе, изображенном на фиг. 7-1. К резервуару *1*, наполненному жидкостью, присоединяют одну или несколько стеклянных круглых трубок *2*. Для уменьшения возмущений, создаваемых в жидкости при входе в трубку, ее входной конец снабжен соплом. Краном *3* можно регулировать количество протекающей в трубке *2* жидкости. Чтобы сделать движение жидкости видимым, в нее вводят по трубке *4* из резервуарчика *5* такую же, как и находящаяся в резервуаре, жидкость, но слегка подкрашенную. Краном *6* подкрашенную жидкость можно включить в общий поток жидкости, движущейся по трубке. Термометр *7* служит для определения температуры жидкости, а мерный бачок *8* со шкалой для определения количества протекающей жидкости. Многочисленные опыты показали, что при определенных условиях подкрашенная струйка жидкости движется в трубке, не смешиваясь с основной массой жидкости (верхняя трубка фиг. 7-1); она вытягивается в тонкую

нить и производит впечатление натянутой струны. Аналогичная картина повторяется и в том случае, если в этот поток ввести несколько подкрашенных струек. Очевидно, это возможно лишь при условии, что вся масса жидкости установившейся движется в трубе параллельными, несмешивающимися струйками. Такое движение без перемешивания частиц называется ламинарным[1]. Струи жидкости, находящиеся на разном расстоянии от оси тру-



Фиг 7-1. Установка для исследования режимов движения.

бы, движутся с различными скоростями, причем максимальную скорость имеет осевая струйка. При стенках скорость жидкости равна нулю. Постепенное увеличение скорости движения частиц (что осуществляется открыванием крана *3*) или нагревание жидкости, ведущее к уменьшению вязкости, понижает устойчивость ламинарного движения и в конце концов разрушают его,— струйка разрывается.

На устойчивость ламинарного движения оказывает влияние вязкость жидкости, характеризующаяся коэффициентом μ (а значит, и ее температура t), ее плотность ρ, скорость движения частиц u или средняя скорость v*, а также диаметр трубопровода d.

Нарушение ламинарного движения при прочих равных условиях (т. е. при равенстве ρ и μ) в трубах большего диаметра происходит при меньших скоростях. Разрыву струйки сначала предшествует образование волнообразных колебаний струйки.

[1] Ламинарный от латинского слова lamina — слоистый.

* Средней скоростью v называется отношение количества жидкости, протекающей через рассматриваемое сечение трубопровода в единицу времени Q, к площади сечения потока ω

$$v = \frac{Q}{\omega}.$$

С усилением колебаний струйка разрывается и затем полностью перемешивается с остальной массой жидкости. Движение частиц производит впечатление беспорядочно перемещающихся вихрей. Этот вид движения называется турбулентным[1].

Механизм турбулентного движения очень сложен. При турбулентном движении частицы жидкости, кроме главного движения вдоль трубопровода, имеют еще и поперечные перемещения, создающие перемешивание жидкости, что оказывает существенное влияние на деформацию объемов жидкости и вследствие этого на гидравлические сопротивления в потоке. Заметим, что все изложенное имеет место и в потоках, ограниченных ложем любой другой формы.

В турбулентном движении, как и в ламинарном, скорость у стенки принято считать равной нулю. По этому поводу Н. Е. Жуковский[2] писал: «Я предлагаю считать (это не очень точно подтверждено опытами, но все же довольно близко к действительности), что при стенках скорость жидкости равна нулю, но что затем она очень быстро возрастает».

Ближайший к стенке, весьма тонкий, слой жидкости движется почти ламинарно и называется пограничным ламинарным слоем.

По исследованиям Н. Е. Жуковского и А. И. Морошкина[3] этот пограничный слой является источником зарождения вихрей, которые, проникая в центральную область потока, разрушают устойчивость ламинарного потока. В иностранной литературе эти исследования называются «русскими опытами».

Из величин ρ, v, μ, d, влияющих на характер движения в круглой трубе, можно образовать лишь один безразмерный комплекс, играющий огромную роль в гидравлических исследованиях. Этому комплексу присвоено название числа Рейнольдса (сокращенно Re)

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu}. \tag{7-1}$$

Весьма часто число Re выражают через среднюю скорость потока v. В потоках, ограниченных ложем не круглого сечения, вместо диаметра d вводится так называемый гидравлический радиус R, определяемый из зависимости

$$d = 4R. \tag{7-2}$$

При обтекании пластины вместо d вводится ее длина и т. п. Подробнее см. § 11-3.

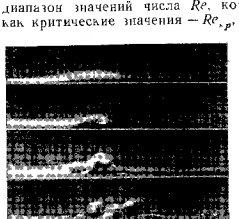
[1] Турбулентный от латинского слова turbulentus — вихревой.

[2] Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, Теоретические основы воздухоплавания, ч. I, стр. 35. 352, ОНТИ НКТП СССР, 1938.

[3] Н. Е. Жуковский, Versuche von Moroschkin, Z. angew. Math. Mech., т. 8, стр. 143, 1928. См. также Математический сборник, т. XXXIII, 2, 1926.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что режим движения жидкости зависит от значения числа Re.

Для каждой конкретной установки существует некоторый диапазон значений числа Re, которые можно рассматривать как критические значения — $Re_{кр}$, при которых и происходит смена режимов движения.



Фиг. 7.2. Развитие турбулентности в потоке

На значение критического числа $Re_{кр}$ огромное влияние оказывают различные возмущения, возникающие в потоке вследствие шероховатости внутренних поверхностей трубопроводов, различных запорных устройств и другой трубопроводной арматуры. Существенное влияние на $Re_{кр}$ оказывают и возмущения, создающиеся у источника питания (в насосе и т. п.), неблагоприятные условия при входе жидкости в трубу (сужения потока и т. п.).

В коротких трубопроводах на $Re_{кр}$ оказывают влияние также и условия на выходе, часто вносящие возмущения в поток.

Необходимо иметь в виду также и то, что переход ламинарного движения к турбулентному удается задержать до создания весьма больших значений Re*, в то время как восстановление ламинарного движения при переходе к нему от турбулентного осуществляется при относительно малых значениях Re. В практике гидравлических расчетов именно это малое значение Re и принимают за $Re_{кр}$. Например, при движении в круглых трубах за нижнюю границу $Re_{кр}$, вычисляемую через среднюю скорость v, принимают:

$$Re_{кр} = 2\,320. \tag{7-3}$$

* В опытах в трубах путем устранения источников возмущения удавалось довести значение чисел Re до $Re = \frac{vd}{\nu} = 100\,000$. В этом выражении v — средняя скорость (см. сноску на стр. 100). Однако ламинарное движение при больших значениях Re очень неустойчиво, иногда достаточно небольшого возмущения для того, чтобы обратить ламинарное движение в турбулентное.

В связи с этим будем считать движение ламинарным, если

$$Re = \frac{vd}{\nu} < 2\,320,$$

турбулентным, если

$$Re > 2\,320.$$

Возмущения, возникающие вследствие посторонних причин в ламинарном потоке (при $Re < Re_{кр}$), если трубопровод достаточно длинный, затухают. В ламинарном потоке, но при больших значениях $Re > Re_{кр}$ или в турбулентном движении эти возмущения уже не затухают, а, наоборот, продолжают развиваться в направлении течения. На фиг. 7.2 показано развитие турбулентности в потоке. Начальное возмущение (верхний снимок) было произведено кратковременным отсасыванием жидкости через отверстие в стенке. Последующие снимки были произведены при помощи кинокамеры, перемещавшейся параллельно потоку со скоростью движения возмущения. В дальнейшем закономерности ламинарного и турбулентного потоков будут рассмотрены подробнее.

Задача 7-1. Определить режим движения воды в трубе при следующих данных: 1) расход воды $Q = 5$ *л/сек*; 2) диаметр трубы $d = 0{,}05$ *м*; 3) температура воды $t = 5°$ C.

Решение. Для определения режима движения необходимо вычислить число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$

Определим для этого сначала

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}005}{3{,}14 \cdot 0{,}0025} = 2{,}55 \text{ м/сек},$$

а затем

$$\nu = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}0337t + 0{,}00122t^2} = \frac{0{,}01775}{1{,}1749} = 0{,}0151 \text{ см}^2/\text{сек},$$

зная v и ν, находим

$$Re = \frac{255 \cdot 5}{0{,}0151} = 84\,437.$$

Так как число Рейнольдса оказалось больше критического значения $Re > 2\,320$, то движение в трубе будет турбулентным.

Задача 7-2. Определить режим движения нефти в трубе при следующих данных: 1) расход нефти $G = 10$ *кГ/сек*; 2) объемный вес $\gamma = 850$ *кГ/м*³; 3) диаметр трубы $d = 0{,}1$ *м*; 4) вязкость нефти в условных градусах $E^{15} = 15°$.

Решение. Так же как и в предыдущей задаче, для определения режима движения необходимо вычислить число Рейнольдса $Re = \frac{vd}{\nu}$. Для определения v необходимо знать объемный расход нефти

$$Q = \frac{G}{\gamma} = \frac{10}{850} = 0{,}0118 \text{ м}^3/\text{сек},$$

откуда

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{0{,}01 \cdot 4}{\pi 0{,}01} = 1{,}50 \text{ м/сек.}$$

Для определения кинематического коэффициента вязкости применим формулу (2-28), принимая $1 - E^{\frac{1}{3}} \approx 1$:

$$\nu = 0{,}01 \cdot E \cdot 7{,}6 = 0{,}01 \cdot 15 \cdot 7{,}6 = 1{,}140 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Таким образом,

$$Re = \frac{150 \cdot 10}{1{,}140} = 1\,315.$$

Так как число Рейнольдса оказалось меньше критического значения $Re < 2\,320$, то, следовательно, движение в трубе будет ламинарным.

7-2. Движение установившееся и неустановившееся. Понятие о местной производной скорости

В зависимости от условий, вызывающих движение жидкости, это движение может быть или установившимся (стационарным), или неустановившимся (нестационарным).

Примером установившегося движения может служить ламинарный поток в трубопроводе при условии, что уровень жидкости в резервуаре (фиг. 7-1) не изменяется.

Установившийся поток характеризуется постоянством поля скоростей в пространстве, занятом потоком, хотя движение самой частицы может быть и неравномерным.

Движение в трубопроводе станет неустановившимся, если уровень жидкости в резервуаре будет меняться. Таким образом, неустановившееся движение характеризуется в пространстве, занятом потоком, меняющимся во времени полем скоростей. Дадим общее определение понятиям установившегося и неустановившегося движения.

Рассмотрим некоторый поток (фиг. 7-3). Выберем в пространстве, занимаемом потоком, произвольную точку A (x_1, y_1, z_1). Если скорости и давления частиц, проходящих в разное время через точку пространства A, будут различны, такое движение будем называть неустановившимся.

Скорости и давления, изменяясь во времени в данной точке, изменяются также при перемещении частицы жидкости из одного положения в другое.

Аналитически это выразится в том, что в неустановившемся движении скорости и гидродинамические давления являются функциями координат точек x, y и z пространства, занимаемого потоком, и времени t:

$$u = u(x, y, z, t); \tag{7-4}$$

$$p = p(x, y, z, t) \tag{7-5}$$

В установившемся движении в отличие от неустановившегося движения скорости и гидродинамические давления в данной точке пространства постоянны, т. е. не изменяются во времени ни по величине, ни по направлению, поэтому частицы движущейся

Фиг. 7-3. В каждой точке пространства скорости и давления изменяются

Фиг. 7-4. В каждой точке пространства скорости и давления постоянны.

жидкости, попадая в разное время в точку пространства A, будут иметь одинаковые скорости и гидродинамические давления (фиг. 7-4).

Аналитически это выразится в том, что в установившемся движении скорости и гидродинамические давления являются функциями только x, y и z, т. е.

$$u = u(x, y, z); \tag{7-6}$$

$$p = p(x, y, z). \tag{7-7}$$

Переменные x, y, z и t называются переменными Эйлера, а метод исследования гидродинамических величин, выражаемых в виде функциональных зависимостей от переменных Эйлера, называется методом Эйлера[1].

Скорости и гидродинамические давления, будучи постоянными в данной точке пространства, изменяются при перемещении частицы жидкости из одного положения в другое.

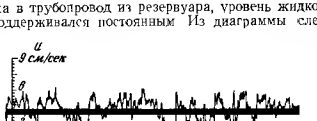
Постоянство поля скоростей в установившемся потоке можно математически выразить следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \tag{7-8}$$

[1] Изучение потока жидкости в некоторых случаях осуществляется и иным методом, также предложенным Л. Эйлером, но развитым главным образом Жозефом-Луи Лагранжем (1736—1813 гг.) и называемым поэтому методом Лагранжа. В методе Лагранжа составляются уравнения движения для каждой частички движущейся жидкости. Координаты движущихся частиц задаются как функции переменных Лагранжа, времени t и координат их начального положения a, b, c.

Экспериментальные исследования показывают, что турбулентное движение всегда является движением только неустановившимся.

На фиг. 7-5 показана диаграмма изменения осевой составляющей скорости в некоторой точке турбулентного потока. Жидкость поступала в трубопровод из резервуара, уровень жидкости в котором поддерживался постоянным Из диаграммы следует, что



Фиг. 7 5. Диаграмма изменения осевой скорости в турбулентном потоке.

поле скоростей в турбулентном потоке изменяется. Несмотря на кажущуюся беспорядочность изменения скоростей в точке, скорости в ней изменяются около некоторого среднего во времени значения. Такая изменяемость называется пульсацией скоростей. Пульсация поля скоростей является основной характеристикой турбулентного потока.

Существует некоторый отрезок времени — период осреднения T, за который осредненная во времени скорость в точке может считаться постоянной Эта скорость определяется по формуле

$$u = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \qquad (7\ 9)$$

и называется осредненной местной скоростью. Здесь u — истинная скорость, а t — время.

Время осреднения T зависит от характера движения и размеров потока Например, для больших открытых русел это время T может составить 5—10 мин. и более.

Установившимся турбулентным движением называется осредненное установившееся движение, поле осредненных скоростей которого постоянно. Примером установившегося турбулентного движения может служить турбулентное движение воды во всасывающей или напорной трубе центробежного насоса при постоянном числе его оборотов или турбулентное движение в трубопроводе, присоединенном к резервуару, уровень жидкости в котором поддерживается постоянным.

При изучении неустановившихся осредненных турбулентных потоков в рассмотрение вводятся местные осредненные скорости, уже не являющиеся постоянными В этом случае интервал времени осреднения должен быть таким, при котором осредненную переменную скорость можно было бы считать постоянной за время осреднения.

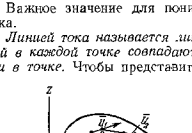
Примером такого неустановившегося движения может служить случай движения жидкости во всасывающей или нагнетательной трубе поршневого насоса. В них вследствие переменной скорости движения поршня жидкость находится в состоянии неустановившегося движения. Обычно насосы снабжаются специальными устройствами, воздушными колпаками, которые содействуют тому, что в трубопроводах движение приближается к установившемуся

Другим примером неустановившегося турбулентного движения может служить турбулентное движение жидкости в трубопроводе, присоединенном к резервуару, уровень жидкости в котором понижается (например, при опорожнении).

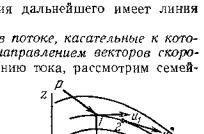
7-3. Линия тока

Важное значение для понимания дальнейшего имеет линия тока.

Линией тока называется линия в потоке, касательные к которой в каждой точке совпадают с направлением векторов скорости в точке. Чтобы представить линию тока, рассмотрим семей-



Фиг. 7-6. Ломаная линия в пределе обращается в линию тока.



Фиг 7-7. Скорость направлена по касательной к линии тока.

ство движущихся частиц жидкости, расположенных вдоль потока на бесконечно малых расстояниях друг от друга, причем таким образом (фиг 7 6), чтобы каждая последующая частица располагалась на направлении вектора скорости предыдущей частицы. В пределе при бесконечно большом количестве частиц, бесконечно близких друг к другу, они расположатся на линии, которая и будет линией тока, соответствующей моменту t_0 (фиг. 7 7).

Для установившегося движения линия тока всегда совпадает с траекторией частиц, на ней расположенных. Для неустановив-

шегося движения линия тока в общем случае не является траекторией частиц, на ней расположенных, так как частицы на линиях тока находятся в общем случае лишь одно мгновение. В момент, следующий за t_0, эти частицы будут принадлежать уже другим линиям тока.

Необходимо отметить, что в установившемся турбулентном движении линий тока как линий, не изменяющихся во времени, не существует. Здесь можно говорить только о линиях тока, соответствующих полю осредненных скоростей.

Имея в виду, что как касательная к линии тока и вектор скорости образуют с осями координат один и те же углы α, β и γ, можно составить дифференциальное уравнение линий тока, воспользовавшись зависимостями

$$dx = dl\cdot\cos\alpha, \quad dy = dl\cdot\cos\beta; \quad dz = dl\cdot\cos\gamma;$$
$$u_x = u\cdot\cos\alpha, \quad u_y = u\cdot\cos\beta, \quad u_z = u\cdot\cos\gamma,$$

где dl — дифференциал дуги линии тока;
а dx, dy и dz — его проекции.

Отсюда

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \tag{7-10}$$

Для неустановившегося движения в выражения u_x, u_y и u_z войдет и время, которое следует рассматривать как параметр.

Для плоского движения, например в плоскости xoy (угол $\gamma = 90$), дифференциальное уравнение линии тока примет вид

$$u_x\cdot dy - u_y\cdot dx = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция $\psi(x, y, t)$, называемая функцией тока, определяющая проекции скорости частиц по формуле

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{7-11}$$

Каждой линии тока соответствует постоянное значение функции тока, уравнение линий тока может быть представлено в виде:

$$\psi(x, y, t) = C. \tag{7-12}$$

Покажем это. Для этого подставим значения u_x и u_y по (7-11) в дифференциальное уравнение. При этом получим.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot dx = 0,$$

или

$$d\psi = 0,$$

что и подтверждает сказанное.

7-4. Движение жидкого элемента. Вихревое и безвихревое движение

В § 7-1 было дано общее представление о перемещении отдельных частиц. Здесь рассмотрим более подробно движение каждой частицы в отдельности.

В отличие от твердого тела, движение которого в теоретической механике в общем случае можно разложить на поступательное движение со скоростью u_0 произвольно выбранной точки (полюса) и на вращательное движение с угловой скоростью Ω вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку, движение жидкого элемента в общем случае можно разложить на три движения. Каждый бесконечно малый элемент жидкости, кроме поступательного и вращательного движения, находится еще и в состоянии деформационного движения.

При таком разложении движения скорость любой точки жидкой частицы можно рассматривать как геометрическую сумму трех скоростей:

$$u = u_0 + u_{вр} + u_{деф}, \tag{7-13}$$

где u_0 — скорость поступательного движения;
$u_{вр}$ — скорость вращательного движения;
$u_{деф}$ — скорость деформации.

Скорость вращательного движения определяется по известным из теоретической механики формулам. Напомним формулы, определяющие проекции скорости вращательного движения:

$$\left.\begin{aligned}(u_{вр})_x &= \Omega_y\cdot dz - \Omega_z\cdot dy,\\ (u_{вр})_y &= \Omega_z\cdot dx - \Omega_x\cdot dz,\\ (u_{вр})_z &= \Omega_x\cdot dy - \Omega_y\cdot dx,\end{aligned}\right\} \tag{7-14}$$

где dx, dy, dz координаты точки относительно полюса;
Ω_x, Ω_y, Ω_z — проекции угловой скорости.

Отсюда следует.

$$\left.\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\\ \Omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\ \Omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7-15}$$

Для определения проекции скорости деформации надо из проекции абсолютной скорости частицы вычесть проекции скоростей переносного и вращательного движений. При этом, учитывая, что

$$u_x = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot dz,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} u_{деф_x} &= u_x - u_{0x} - u_{вр_x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dy + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)dz, \\ u_{деф_y} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)dz, \\ u_{деф_z} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)dy. \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}16)$$

Движение жидкости с вращением ее частиц называется вихревым. Удвоенное значение вектора угловой скорости назовем вихрем скорости.

Вихревое движение возникает при обтекании быков моста, за кораблем. Движения в трубопроводах также являются вихревыми. Примером вихревых движений являются циклоны и антициклоны, а также смерчи. Образование вихревых движений обусловливается различными причинами. Большую роль, особенно в трубопроводах, играет вязкость жидкостей (§ 2-4).

Наряду с вихревыми движениями в гидродинамике рассматриваются движения безвихревые, в которых вихрь скорости равен нулю.

Так как при безвихревом движении

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0,$$

то для такого движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (7\text{-}17)$$

Безвихревое движение называется также потенциальным движением, потому что этому движению удовлетворяет функция $\varphi(x, y, z, t)$, называемая потенциалом скорости, определяющая вектор скорости и его проекции по формулам:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi, \quad (7\text{-}18)$$

или

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (7\text{-}19)$$

Легко убедиться в том, что соотношения (7-19) удовлетворяют условиям равенства нулю вихря, т. е. уравнениям (7-17). Проверив одно из них, например первое, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\cdot\partial x} \text{ и т. п.}$$

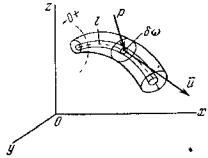
Во многих практически важных случаях действительные движения дают картину, близкую к безвихревому движению. Потенциальный поток положен в основу расчета многих типов гидравлических машин (насосов, турбин). При обтекании потоком жидкости тела вблизи него в области так называемого пограничного слоя движение оказывается вихревым, но на некотором от него расстоянии (вне пограничного слоя), как указывал Н. Е. Жуковский, движение можно рассматривать как потенциальное.

Глава восьмая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

8-1. Гидравлическая модель потока

Основным элементом гидравлической модели потока является элементарная струйка. Для ее определения сперва введем понятие трубки тока. Для этого представим себе бесконечно малый замкнутый контур (фиг. 8-1), каждая точка которого принадлежит различным линиям тока. В этом случае линии тока, проходящие через точки такого контура, образуют трубчатую поверхность, называемую трубкой тока.



Фиг. 8-1. Схема элементарной струйки

Жидкость, заполняющая трубку тока, образует элементарную струйку.

В неустановившемся потоке форма элементарных струек непрерывно изменяется. В установившемся потоке элементарные струйки, так же как и линии тока, сохраняют постоянную форму.

Поток в целом можно рассматривать как совокупность элементарных струек (для установившегося движения не изменяющихся во времени).

Сечение струйки, нормальное к ее линиям тока, назовем живым сечением струйки; площадь его обозначается через $\delta\omega$. Положение движущихся частиц можно определить криволинейными координатами, а именно расстоянием частичек от некоторого начала отсчета, взятого на оси элементарной струйки (фиг. 8-1), а скорости и давления в точках пространства вместо формул (7-4)—(7-7) выразить в виде:

для неустановившегося движения

$$u = u(l, t), \quad (8\text{-}1)$$

$$p = p(l, t); \quad (8\text{-}2)$$

для установившегося движения

$$u = u(l), \tag{8-3}$$

$$p = p(l). \tag{8-4}$$

Элементарным расходом потока называется количество жидкости, протекающее через данное живое сечение элементарной струйки в единицу времени. Расход вычисляется в единицах объема, массы и веса. Вследствие того, что площадь сечения струйки бесконечно мала, можно считать, что все частички этого сечения имеют одинаковую скорость u. При этом предположении через живое сечение струйки в единицу времени протекает количество жидкости (например, кубических метров в секунду), называемое элементарным объемным расходом δQ [$м^3/сек$] и определяемое по формуле

$$\delta Q = u\delta\omega \; [м^3/сек]. \tag{8-5}$$

В формуле (8-5) u измеряется в $м/сек$, а $\delta\omega$ в $м^2$. Элементарный массовый расход вычисляется по формуле

$$\delta M = \rho u\delta\omega \; [кГ \cdot сек/м], \tag{8-6}$$

элементарный весовой расход вычисляется по формуле

$$\delta G = \gamma u\delta\omega \; [кГ/сек]. \tag{8-7}$$

8-2. Уравнение непрерывности

Одним из важнейших следствий принципа непрерывности является так называемое уравнение непрерывности потока — уравнение, выражающее зависимости между скоростями в потоке, в котором гидродинамические величины непрерывны. Для капельной жидкости уравнение непрерывности выражает условие, при котором в потоке отсутствуют разрывы струй, и поэтому называется уравнением неразрывности[1]

Выведем уравнение непрерывности для элементарной струйки (фиг. 8-2). Рассмотрим отсек струйки длиной δl, ограниченный сечениями $\delta\omega$ слева и $\delta\omega_2$ справа. Обозначим через $\rho\delta Q$ массовый расход жидкости через сечение струйки $\delta\omega_1$. Вследствие принципа непрерывности через сечение $\delta\omega_2$ протекает расход

$$(\rho\delta Q)_2 = (\rho\delta Q)_1 - \frac{\partial}{\partial l}(\rho\delta Q)\,\delta l.$$

Ввиду того, что в общем случае расходы не равны друг другу в рассматриваемом объеме элементарной струйки, будет

[1] Нарушение непрерывности может быть вызвано кавитационными явлениями (см. гл. 2 и 17).

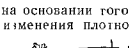
каждую секунду (единицу времени) происходить приращение массы, которое определим по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = (\rho\delta Q)_2 - (\rho\delta Q)_1 = \frac{\partial}{\partial l}(\rho\delta Q)\,\delta l.$$

Приращение массы может произойти на основании того же принципа непрерывности только за счет изменения плотности жидкости ρ и объема отсека струйки.

Масса жидкости в рассматриваемом объеме равна

$$\delta M = \rho\delta\omega\delta l,$$



Фиг. 8-2. Схема элементарной струйки в неразрывном потоке.

где $\delta\omega$ — некоторое промежуточное значение живого сечения рассматриваемой элементарной струйки.

Секундное приращение массы может быть вычислено по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\omega)\,\delta l.$$

Приравнивая оба значения $\frac{\partial}{\partial t}(\delta M)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\omega) + \frac{\partial}{\partial l}(\rho\delta Q) = 0. \tag{8-8}$$

Имея в виду, что

$$p = p(l, t),$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial l}\cdot\frac{dl}{dt},$$

$$\delta Q = u\delta\omega,$$

$$u = \frac{dl}{dt},$$

уравнение (8-8) можно представить в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\delta\omega}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) + \frac{\partial}{\partial l}(\delta Q)\right] = 0. \tag{8-9}$$

Уравнения (8-8) и (8-9) являются уравнениями непрерывности. Исследуем полученные уравнения.

Рассмотрим установившееся движение жидкости (капельной или газа); для установившегося движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\omega) = 0.$$

Поэтому из уравнения (8-8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho\delta Q) = 0,$$

откуда

$$\rho\delta Q = \text{idem}, \tag{8-10}$$

или

$$\rho_1 u_1 \delta\omega_1 = \rho_2 u_2 \delta\omega_2, \tag{8-11}$$

т. е в установившемся движении капельной жидкости и газа массовый расход $\rho\delta Q = \rho u\delta\omega$ по длине элементарной струйки имеет одно и то же значение Для капельной жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому

$$\delta Q = \text{idem}; \tag{8-12}$$

$$u_1\delta\omega_1 = u_2\delta\omega_2. \tag{8-13}$$

Из формул следует, что скорости в различных сечениях элементарной струйки капельной жидкости обратно пропорциональны площадям живых сечений

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta\omega_2}{\delta\omega_1}, \tag{8-14}$$

а в элементарной струйке газа обратно пропорциональны произведениям $\rho\delta\omega$, т. е.

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2\delta\omega_2}{\rho_1\delta\omega_1}. \tag{8-15}$$

Рассмотрим неустановившееся движение только капельной жидкости ($\rho = \text{const}$). В этом случае

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

и из формулы (8-9) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) + \frac{\partial}{\partial t}(\delta Q) = 0. \tag{8-16}$$

Для многих гидродинамических задач важным является применение принципа непрерывности для каждой точки потока

Для вывода этого уравнения рассмотрим внутри пространства, занимаемого потоком, элементарный неподвижный прямоугольный параллелепипед с ребрами δx, δy и δz, через который протекает жидкость (фиг. 8-3).

Обозначим скорость и ее проекции, а также плотность в центре параллелепипеда через u, u_x, u_y, u_z и ρ. В параллелепипеде через его центр проведем плоскость, перпендикулярную к оси x. Массовый расход жидкости через эту плоскость δq_x будет равен:

$$\delta q_x = \rho u_x \delta y \delta z.$$

Массовый расход жидкости δq_1, втекающей в параллелепипед через левую грань площадью $\delta\omega_x$, согласно принципу непрерывности будет равен:

$$\delta q_{x_1} = \left[\rho u_x - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\cdot\frac{1}{2}\delta x\right]\delta y\delta z,$$

а массовый расход δq_{x_2} жидкости, вытекающей через правую грань, будет:

$$\delta q_{x_2} = \left[\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\cdot\frac{1}{2}\delta x\right]\delta y\delta z.$$

В общем случае расходы δq_{x_1} и δq_{x_2} не равны друг другу. Вследствие этого секундное приращение массы жидкости в параллелепипеде, обусловленное неодинаковостью скоростей u_x и плотностей ρ на рассматриваемых площадках, будет равно:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\delta x\delta y\delta z.$$

Фиг. 8 3. В неразрывном потоке изменение массы в объеме параллелепипеда в общем случае происходит непрерывно.

Аналогичные выражения можно получить и для приращения массы параллелепипеда, обусловленного изменениями скоростей и плотностей на других гранях.

Общее секундное приращение массы параллелепипеда будет равно:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\right]\delta x\delta y\delta z. \tag{8-17}$$

Но изменение массы в полностью заполненном и неизменяемом объеме $\delta x\delta y\delta z$ может произойти только за счет изменения плотности жидкости в этом объеме. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta M) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z. \tag{8-18}$$

Приравнивая значения $\frac{\partial}{\partial t}(\delta M)$, найдем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0, \tag{8-19}$$

или, имея в виду, что в общем случае $\rho = \rho(x, y, z, t)$, получим:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{8-20}$$

Уравнению непрерывности можно придать следующий вид:

1. Для капельной жидкости $\left(\frac{d\rho}{dt}=0\right)$ всегда

$$\frac{du_x}{dx}+\frac{du_y}{dy}+\frac{du_z}{dz}=0. \tag{8-21}$$

Это равносильно тому, что при любом движении капельной (неоднородной и однородной) жидкости, удовлетворяющем принципу непрерывности, объемы жидкости, втекающей в рассматриваемый неподвижный объем и вытекающей из него, равны. Это уравнение выражает также и условие неразрывности потока.

2. Для установившегося движения газа $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)=0. \tag{8-22}$$

Из последнего выражения в связи с (8-17) следует, что в установившемся движении газа изменение массы в рассматриваемом неподвижном объеме не происходит

Это значит, что в объем втекает и из объема вытекает одинаковое количество массы жидкости.

8-3. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Л. Эйлера)

При выводе дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости пренебрегают силами трения. Вследствие этого основное свойство гидростатического давления независимость его от направления может быть распространено и на гидродинамическое давление, т. е. может быть принято: $p_x=p_y=p_z$.

Рассмотрим сначала абсолютное движение, т. е. движение по отношению к земле, причем движение самой земли не будем учитывать.

В потоке жидкости выделим частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (фиг. 8 4) с ребрами длиной δx, δy и δz. В рассматриваемом случае на частицу действует массовая сила — только сила тяжести δG — и, кроме того, шесть поверхностных сил — сил давления δP_i на соответствующие грани. Рассматриваемая частица движется в общем случае с ускорением $\bar{a}=\frac{d\bar{u}}{dt}$, где $\frac{d\bar{u}}{dt}$ — производная от вектора скорости $\bar{u}$ — центра частицы по времени. Согласно закону движения центра инерции геометрическая сумма действующих сил должна равняться произведению массы частички δM на ускорение ее центра $a=\frac{d\bar{u}}{dt}$.

Таким образом, уравнение движения может быть записано в виде[1]:

$$\sum_{i=1}^{6}\delta\bar{P}_i+\delta\bar{G}=\delta M\cdot\frac{d\bar{u}}{dt}. \tag{8-23}$$

Для получения уравнения Эйлера преобразуем уравнение (8-23). Для этого сперва спроектируем его на какую-либо ось, например на ось x.

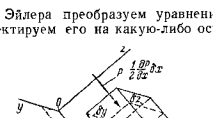
Получим:

$$\delta G_x+\delta P_1-\delta P_2=\delta M\frac{du_x}{dt}$$

Проекции остальных сил давления на ось x равны нулю, так как силы перпендикулярны к оси проекции.

Проекция силы веса на ось x

$$\delta G_x=X\rho\delta x\delta y\delta z,$$



Фиг 8-4. Частичная схема сил, действующих на элементарный параллелепипед в потоке

где X — проекция на ось x ускорения только силы тяжести g.

Для определения разности сил $\delta P_1-\delta P_2$ обозначим гидродинамическое давление в центре параллелепипеда через p. Поскольку силы трения приняты равными нулю,

$$p=p_x=p_y=p_z.$$

В общем случае гидродинамическое давление p является функцией координат и времени, т. е.

$$p=p(x,\ y,\ z,\ t).$$

Давление p_1 на площадке левой грани будет равно:

$$p_1=p-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\delta x$$

и на площадке правой грани

$$p_2=p+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\delta x,$$

[1] Для реальной жидкости уравнение должно было бы быть записано в виде:

$$\sum_{i=1}^{6}\delta\bar{P}_i+\sum_{i=1}^{6}\delta\bar{T}_i+\delta\bar{G}=\delta M\frac{d\bar{u}}{dt}, \tag{8-23'}$$

где δT_i — силы трения, действующие по граням частицы.

поэтому[1]

$$\delta P_1 - \delta P_2 = (p_1 - p_2)\,\delta y \delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x \delta y \delta z.$$

Найдем проекцию ускорения a_x. Для этого сперва вычислим:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}\,dz,$$

а затем

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\,u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\,u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}\,u_z, \qquad (8\text{-}24)$$

поскольку $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$, $\frac{dz}{dt} = u_z$

Подставляя необходимые значения в уравнение проекций сил, после сокращения получим:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

и аналогично для других осей

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z},$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad (8\text{-}25)$$

где X, Y и Z проекции на оси x, y и z ускорения только силы тяжести g

Полученные три уравнения A являются дифференциальными уравнениями движения идеальной жидкости уравнениями Эйлера. Эти уравнения были получены им в 1755 г. Они справедливы как для капельной жидкости, так и для газа

Обратим внимание на то, что полученные выше дифференциальные уравнения движения оказываются недостаточными для решения гидродинамических задач, поскольку число неизвестных (ρ, p, u_x, u_y и u_z) больше числа уравнений.

Четвертым уравнением, замыкающим систему уравнений для капельной жидкости (ρ = const), будет уравнение непрерывности (8-21).

Для исследования движения газовых потоков ($\rho \neq$ const) необходимо пополнить систему пятым уравнением, каковым является уравнение состояния Клапейрона-Менделеева (см. гл 2), а уравнение непрерывности брать в форме (8-20).

[1] См. сноску на стр 36.

Полученные выше уравнения Эйлера для абсолютного движения можно представить в векторной форме, а именно.

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,(p) = \frac{du}{dt}, \qquad (8\text{-}26)$$

где $\bar{g}$ — вектор ускорения силы тяжести;
grad (p) — градиент гидродинамического давления (см. сноску на стр. 38)

Справедливость этой формы уравнения легко проверить, спроектировав его на оси координат, после чего получим уравнения Эйлера в координатной форме.

Уравнения Эйлера могут быть также использованы и для относительного движения. Однако в этом случае X, Y и Z уже будут являться алгебраической суммой ускорений силы тяжести — g, силы инерции переносного движения — $\bar{j}_{пер}$ и силы инерции Кориолиса $\bar{j}_к$.

Вместо абсолютной скорости u в уравнение надо ввести относительную скорость w Вместо (8-26) получим.

$$(\bar{g} + \bar{j}_{пер} + \bar{j}_к) - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,(p) = \frac{d\bar{w}}{dt}. \qquad (8\text{-}27)$$

8-4. Дифференциальные уравнения Л. Эйлера в естественной форме

Уравнениями Эйлера в естественной форме называются дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости, выраженные в форме проекций на оси натурального триэдра (на касательную и главную нормаль к линии тока) (фиг 8-5). Обозначая направление касательной через l и принимая во внимание, что проекция градиента давления на направление l равна:

$$[\mathrm{grad}\,(p)]_l = \frac{\partial p}{\partial l},$$

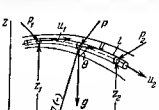
$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)_l = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l}\,u,$$

будем иметь:

$$g_l - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{u^2}{2}\right). \qquad (8\text{-}28)$$

Аналогично для проекций на главную нормаль n получим

$$g_n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{u^2}{r}, \qquad (8\text{-}29)$$



Фиг. 8-5 Положительное направление нормали взято от центра кривизны линии тока

где проекция ускорения $\frac{du}{dt}$ на главную нормаль равна нормальному ускорению

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_n = -\frac{u^2}{r},$$

а r — радиус кривизны линии тока; положительное направление нормали выбрано в направлении от центра кривизны линии тока.

8-5. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки идеальной капельной жидкости при неустановившемся и установившемся движении

Уравнение Бернулли является интегралом уравнений Эйлера.

Для получения уравнения Бернулли для элементарной струйки капельной идеальной жидкости в общем случае при неустановившемся движении воспользуемся уравнением (8-28).

В этом уравнении g_t — проекция ускорения силы тяжести на направление касательной к линии тока.

Выберем оси координат, как показано на фиг 8-5. При таком расположении осей

$$g_t = g\cos\theta = -g\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Подставляя в (8-28), найдем:

$$-g\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Для капельной жидкости это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{du}{dt}, \tag{8-30}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8-31}$$

Это и есть уравнение Бернулли для неустановившегося движения идеальной жидкости, но в дифференциальной форме.

Для установившегося движения $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Поэтому для установившегося движения уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = 0. \tag{8-32}$$

Заметим, что для установившегося движения формула (8-28) после умножения на dl может быть представлена в виде:

$$g_t dl - \frac{1}{\rho}dp = d\left(\frac{u^2}{2}\right). \tag{8-33}$$

Уравнение (8-33) выражает теорему кинетической энергии для установившегося движения частицы идеальной жидкости.

Левая часть определяет элементарную работу сил тяжести и сил давления, отнесенную к единице массы [1], а $d\left(\frac{u^2}{2}\right)$ есть дифференциал (элементарное приращение) кинетической энергии, отнесенный также к единице массы.

Таким образом, *в установившемся движении частицы идеальной жидкости дифференциал (элементарное приращение) кинетической энергии единицы массы равен сумме элементарных работ сил тяжести и сил гидродинамического давления.*

Для идеальной жидкости важным является тот факт, что вся работа сил, действующих на частицу, затрачивается только и только на изменение ее кинетической энергии.

Уравнения Бернулли в конечной форме могут быть получены после интегрирования уравнений (8-31) и (8-32) вдоль линии тока. Сперва проинтегрируем первое из них от сечения *1* до сечения *2* (фиг. 8-5).

Для этого сначала умножим левую и правую часть на dl, получим:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)\cdot dl = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot dl,$$

откуда после интегрирования

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dl.$$

Обозначим через $h_и$ и назовем инерционным напором выражение

$$h_и = \frac{1}{g}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dl. \tag{8-34}$$

Перепишем предыдущую формулу в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_и. \tag{8-35}$$

[1] Сказанное относительно сил давления может быть доказано подобно тому, как это было сделано в гидростатике [см уравнение (3-8)]

Для установившегося движения согласно уравнению (8-32)

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{idem}, \tag{8-36}$$

поэтому

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \tag{8-37}$$

В уравнениях (8-36) и (8-37) каждый из трехчленов имеет не только одно и то же значение, но и остается постоянным во времени.

Уравнение (8-35) для неустановившегося движения идеальной жидкости справедливо лишь для любых двух частиц, расположенных на одной и той же линии тока.

Уравнение (8-37) для установившегося движения идеальной жидкости справедливо не только для двух любых частиц, расположенных на одной и той же линии тока, но и для одной и той же частицы в двух ее положениях на траектории.

Таким образом, хотя каждый из членов уравнения z, $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{u^2}{2g}$ вдоль линии тока идеальной жидкости и изменяется, но их сумма в установившемся потоке для данной траектории или линии тока сохраняет одно и то же постоянное значение.

Трехчлен $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ в отличие от двучлена $z + \frac{p}{\gamma}$, встречавшегося в гидростатике, называется гидродинамическим напором и обозначается через $H_{гд}$:

$$H_{гд} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}. \tag{8-38}$$

Величины z и $\frac{p}{\gamma}$ в уравнении Бернулли имеют те же наименования и тот же смысл, что и в гидростатике (см. § 4-4).

Величина $\frac{u^2}{2g}$ называется скоростным напором. Из теоретической механики известно, что это выражение определяет высоту, на которую поднимается в пустоте материальная частица жидкости, начавшая двигаться с вертикальной скоростью u. Поэтому эта величина называется также скоростной высотой.

В то же время член $\frac{u^2}{2g}$ является мерой удельной кинетической энергии, т. е. кинетической энергии, отнесенной к единице веса.

В самом деле, частица, имеющая массу M и скорость u, обладает кинетической энергией $K = \frac{Mu^2}{2}$. Вес этой частицы $G = Mg$.

Удельная кинетическая энергия, т. е. энергия, отнесенная к единице веса, будет равна:

$$K_{уд} = \frac{K}{Mg} = \frac{u^2}{2g}.$$

Таким образом, *гидродинамический напор $H_{гд}$ равен полной механической удельной энергии движущейся частицы жидкости.* Из уравнений (8-36) (8-37) следует, что в *установившемся движении идеальной жидкости все частицы, расположенные на одной и той же линии тока, обладают одинаковой полной удельной энергией.* То же уравнение может быть сформулировано и так: *в установившемся движении идеальной жидкости полная удельная энергия частицы жидкости сохраняет постоянное значение*[1].

Если ось элементарной струйки, которую можно рассматривать как линию тока, представляет пространственную кривую, а сечение элементарной струйки по ее длине изменяется, то отдельные составляющие полной удельной энергии соответственно изменяются. В этом случае установившегося движения происходит лишь преобразование одного вида энергии в другой, но без изменения ее суммы. Например, увеличение кинетической энергии вызывает такое же по величине уменьшение потенциальной энергии и наоборот.

В неустановившемся потоке согласно (8-35) частицы, расположенные в различных сечениях элементарной струйки, обладают неодинаковой энергией. Разность энергий двух частиц равна инерционному напору. При этом в зависимости от знака инерционного напора полная удельная энергия по длине элементарной струйки в направлении движения может или убывать, если инерционный напор положителен, или возрастать, если инерционный напор отрицателен.

Заметим, что численное значение инерционного напора зависит от изменения скоростей скоростного поля (от $\frac{\partial u}{\partial t}$), а также и от расстояния между рассматриваемыми сечениями. Знак инерционного напора зависит только от закона изменения скорости.

Инерционный напор оказывает влияние на изменение энергии потока по его длине и поэтому может рассматриваться как источ-

[1] Отметим, что величина полной удельной энергии частиц, принадлежащих различным элементарным струйкам, в общем случае будет неодинакова.

ник дополнительной энергии при $\frac{du}{dt} < 0$ *и как своеобразное сопротивление при* $\frac{du}{dt} > 0$. *Особенно велико влияние инерционного напора при больших значениях* $\frac{du}{dt}$, *что, например, имеет место при гидравлическом ударе.*

8-6. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки реальной капельной жидкости

В отличие от идеальной жидкости, в которой работа сил, действующих на жидкость, полностью идет на изменение ее кинетической энергии, благодаря чему в потоке происходит только преобразование кинетической энергии в потенциальную или наоборот, в реальной жидкости часть работы сил, действующих на жидкость, затрачивается на преобразование механической энергии в тепловую

Если преобразование одной формы механической энергии в другую форму механической энергии является процессом обратимым, то преобразование механической энергии в тепловую, происходящее вследствие действия сил трения, является уже процессом необратимым.

«Исчезающее здесь механическое движение исчезает *как таковое*. Оно на первых порах не восстановимо снова само собою. Процесс непосредственно не обратим. Механическое движение превратилось в качественно отличные формы движения, в теплоту, в электричество — в формы молекулярного движения»[1].

Это явление, называемое диссипацией энергии, в гидравлике рассматривается как гидравлическое сопротивление, а величина диссипируемой энергии называется потерями энергии. Потери удельной энергии происходят только в деформирующейся жидкости и вследствие ее вязкости[2]. Явление диссипации в потоке жидкости чрезвычайно сложно. Оно обусловливается возникающими в потоке силами трения.

Для аналитического определения потерь энергии необходимо знать распределение истинных скоростей в потоке, что, однако, известно только для простейших случаев движения. Поэтому в большинстве случаев потери удельной энергии приходится определять на основании экспериментальных данных. Современный гидравлический эксперимент для этой цели широко использует метод моделирования, научной базой которого является теория

[1] Фридрих Энгельс, Диалектика природы, 1953.

[2] Если бы движение жидкости сводилось только к поступательному перемещению и вращению, т. е. к движению, подобному движению твердого тела, то никаких потерь энергии не было бы (см Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 1948, ч II, стр. 299).

подобия. Аналитический прием для определения гидравлических сопротивлений будет использован при изучении ламинарного движения.

Заметим, что величина потерь удельной энергии зависит от режима и скорости движения жидкости, от формы трубопроводов, шероховатости стенок, от различных устройств, монтируемых на трубопроводах. Потери удельной энергии между двумя сечениями элементарной струйки обозначим через h_n. В связи с этим уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости при установившемся движении может быть представлено в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n, \qquad (8\text{-}39)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = -J,$$

где J — падение удельной энергии на единице длины элементарной струйки, называемое гидравлическим уклоном.

Для неустановившегося движения

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n + h_u. \qquad (8\text{-}40)$$

Таким образом, в потоке реальной жидкости удельная энергия частиц, расположенных на одной и той же линии тока и слагающаяся из удельной потенциальной энергии положения z, удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$ и удельной кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$,

$$H_{гд} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g},$$

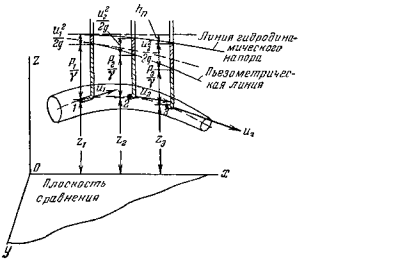
изменяется при переходе от одного сечения к другому.

Вследствие гидравлических сопротивлений энергия $H_{гд}$ только уменьшается в направлении движения, а вследствие неустановившегося характера движения, благодаря которому создается инерционный напор, энергия или еще больше уменьшается при ускоряющемся движении ($\frac{du}{dt} > 0$), или благодаря инерционному напору потери в той или другой степени компенсируется при затухающем движении ($\frac{du}{dt} < 0$).

8-7. Диаграмма уравнения Д. Бернулли для элементарной струйки капельной жидкости

Благодаря тому, что все члены уравнения Бернулли имеют размерность длины, зависимость между отдельными членами уравнения чрезвычайно наглядно изображается графически (фиг. 8-6).

Построение этой диаграммы осуществляется следующим образом.



Фиг. 8-6. Диаграмма уравнения Бернулли для частиц жидкости в установившемся потоке.

Пунктирная кривая соответствует пьезометрической линии в идеальной жидкости с одной и той же начальной скоростью.

Выбираем произвольным образом систему координат с горизонтальной плоскостью сравнения xoy Взяв на какой-либо линии тока несколько точек, определим давления и скорости в них. По вертикали вверх от соответствующих точек откладываем сначала значение удельной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$, а потом удельной кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$.

Соединив концы отрезков, изображающих соответствующие удельные энергии линий, мы получим три линии:

1) линию удельной энергии положения (она же линия тока), причем удельная энергия положения будет измеряться высотой положения данной точки над произвольно расположенной горизонтальной плоскостью сравнения;

2) линию удельной потенциальной энергии, или пьезометрическую линию, причем удельная потенциальная энергия давления будет измеряться отрезком, заключенным между пьезометрической линией и линией удельной энергии положения;

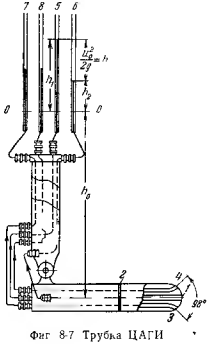
3) линию полной удельной энергии (линия гидродинамического напора), причем удельная кинетическая энергия будет измеряться отрезком, заключенным между линией полной удельной энергии и линией потенциальной удельной энергии. Так как полная удельная энергия частицы реальной жидкости в направлении движения уменьшается, то и линия, ее изображающая, будет спадающей в направлении движения.

Следует обратить внимание на то, что уменьшение полной удельной энергии не вызывает обязательного уменьшения кинетической энергии, которая является лишь частью полной энергии. Например, при равномерном движении скорость частицы постоянна, поэтому постоянен и скоростной напор. Очевидно, что в этом случае уменьшение полной удельной энергии может происходить только за счет изменения полной потенциальной энергии.

Для идеальной жидкости линия полной удельной энергии расположится в горизонтальной плоскости, называемой в идеальной жидкости плоскостью гидродинамического напора

При одинаковых удельных энергиях для реальной и идеальной жидкости в точке с координатой z_1 линия полной потенциальной энергии для идеальной жидкости изобразится, как показано на фиг. 8 6, пунктиром.

Опытным путем диаграмма уравнения Бернулли может быть построена при помощи прибора, показанного на фиг. 8 7 и называемого скоростной трубкой.



Фиг 8-7 Трубка ЦАГИ

8-8. Скоростная трубка

Скоростная трубка предназначается главным образом для измерения скоростного напора Она представляет собой усовершен-

ствованную ЦАГИ[1] так называемую трубку Пито-Прандтля[2].

Скоростная трубка (фиг 8 7) состоит из корпуса, внутри которого расположена центральная трубка *1*, открытый конец которой устанавливается против потока таким образом, чтобы скорость потока была направлена по оси отверстия (см. трубку, показанную на фиг. 8-7).

В этом случае при обтекании жидкостью трубки в точке *1* происходит уменьшение скорости от u_0 до нуля и согласно (8-37) увеличение давления на величину

$$\frac{\delta p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g}, \quad \text{или} \quad \delta p = \rho \cdot \frac{u_0^2}{2}.$$

Благодаря этому в пьезометре *5*, присоединенном к этой трубке, жидкость поднимется на высоту

$$h_0 + h_1 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g}.$$

Избыточное давление невозмущенного потока p_0 соответствует давлению возле щели *2*, сделанной в корпусе трубки. Это давление через внутреннюю полость корпуса воспринимается пьезометром *6*. В нем жидкость поднимается на высоту $h_0 + h_2 = \frac{p_0}{\gamma}$ (где p_0 — избыточное давление).

Разность высот определяет значение удельной кинетической энергии

$$h = \frac{u_0^2}{2g}.$$

В этом случае скорость может быть вычислена по формуле

$$u_0 = \sqrt{2gh}.$$

Для того чтобы учесть влияние вязкости жидкости и нарушений в потоке, вызываемых установкой трубки, необходимо полученную формулу для скорости представить в виде.

$$u_0 = \varphi \cdot \sqrt{2gh}, \tag{8 41}$$

где коэффициент φ определяется опытным путем. Для трубки ЦАГИ $\varphi = 1 \div 1{,}04$.

Трубки *3* и *4* служат для установки прибора по направлению скорости. К ним присоединяются два пьезометра *7* и *8*. При правильной установке трубки пьезометров *7* и *8* должны давать одинаковые показания.

[1] ЦАГИ - Центральный Аэрогидродинамический институт имени проф. Н. Е Жуковского.

[2] Прибор был изобретен французским инженером Пито в 1753 г. и усовершенствован немецким ученым Прандтлем.

8-9. Уравнение Д. Бернулли для потенциального движения капельной жидкости

Вывод уравнения Д. Бернулли для потенциального движения идеальной капельной жидкости дадим, исходя из уравнений Эйлера (8 25).

Если под z подразумевать вертикальную координату, то g_ξ, g_η и g_ζ, как проекции ускорения силы тяжести на произвольно расположенные оси координат ξ, η и ζ, могут быть вычислены по формулам:

$$g_\xi = -\frac{\partial}{\partial \xi}(gz); \quad g_\eta = -\frac{\partial}{\partial \eta}(gz); \quad g_\zeta = -\frac{\partial}{\partial \zeta}(gz). \tag{8-42}$$

Определим при помощи формул (7 15), заменив в этих формулах координаты x, y и z на ξ, η и ζ, значения:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - 2\Omega_\zeta,$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + 2\Omega_\eta$$

подставляя найденные значения в уравнения (8 25), получим для капельной жидкости.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi}\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = -2(\Omega_\eta u_\zeta - \Omega_\zeta u_\eta) - \frac{\partial u_\xi}{\partial t};\\
&\frac{\partial}{\partial \eta}\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = -2(\Omega_\zeta u_\xi - \Omega_\xi u_\zeta) - \frac{\partial u_\eta}{\partial t};\\
&\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = -2(\Omega_\xi u_\eta - \Omega_\eta u_\xi) - \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{8-43}$$

Для потенциального потока

$$\Omega_\xi = \Omega_\eta = \Omega_\zeta = 0,$$

а в установившемся движении

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial t} = \frac{\partial u_\eta}{\partial t} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} = 0,$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = 0;\\
&\frac{\partial}{\partial \eta}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = 0;\\
&\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{8-44}$$

откуда следует, что сумма

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{idem} \tag{8-45}$$

не зависит от координат пространства, т. е. имеет одно и то же значение во всем потоке, а не только на одной линии тока.

8-10. Уравнение Д. Бернулли для идеальной и реальной капельной жидкости в относительном установившемся движении

Уравнение Бернулли для относительного движения будет выведено для установившегося движения идеальной жидкости в канале рабочего колеса гидравлической машины, показанном на фиг 8-8 и 8-9, вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω1/сек. вокруг оси, проходящей через центр O.

При исследовании относительного движения будем обозначать скорость абсолютного движения через c, скорость относи-

Фиг. 8-8 Кинематика потока в лопастном колесе насоса или турбины.

Фиг. 8-9. Кинематика потока в лопастном колесе турбины.

тельного движения через w, скорость переносного движения через u.

Жидкость, заполняющая каналы рабочего колеса, вращается вместе с колесом и, кроме того, перемещается в каналах рабочего колеса, т. е совершает относительное движение по отношению к рабочему колесу. Таким образом, абсолютная скорость c некоторой частицы определяется диагональю параллелограмма, построенного на скорости относительного движения w и скорости переносного движения u:

$$u = \frac{2\pi r n}{60}, \tag{8-46}$$

где r — расстояние частицы от оси вращения;
n — число оборотов рабочего колеса в минуту.

Для получения уравнения безразлично направление относительного движения также, как и направление вращения. Случай относительного движения в направлении к внешней окружности колеса имеет место всегда в центробежном насосе. В турбинах возможно движение и в направлении к внутренней окружности

колеса Полученные результаты будут справедливы и для любого другого относительного движения, если только переносное движение будет вращательным.

Воспользуемся уравнением (8-27). Спроектируем его на направление касательной к траектории относительного движения. Проекция силы инерции Кориолиса на касательную равна нулю, так как она перпендикулярна к этой траектории

Ускорение силы инерции переносного движения равно центробежному ускорению силы инерции.

$$j_{пер} = r\Omega^2.$$

Подставляя, получим:

$$g\cos\theta + r\Omega^2\cos\beta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{dw}{dt}, \tag{8-47}$$

но

$$\cos\theta = -\frac{\partial z}{\partial l},$$

где z — вертикальная координата;

$$\cos\beta = \frac{\partial r}{\partial l};$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{w^2}{2}\right),$$

для установившегося движения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{w^2}{2}\right).$$

Подставляя полученные значения в формулу (8-47), будем иметь:

$$g\frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{w^2}{2}\right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z - \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g}\right) = 0, \tag{8-48}$$

откуда

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} = \text{idem}. \tag{8-49}$$

Для двух частиц, расположенных на одной линии тока, или для одной частицы в ее двух положениях на ее траектории это уравнение может быть представлено в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} - \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}\right). \tag{8-50}$$

Из последнего выражения следует, что полная удельная энергия частицы идеальной жидкости в относительном движении $H_{отн}$, равная

$$H_{отн} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g}, \qquad (8\text{-}51)$$

изменяется на величину

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

за счет работы центробежных сил инерции переносного движения.

В центробежном насосе всегда $u_2 > u_1$, поэтому удельная энергия в относительном движении всегда увеличивается за счет работы центробежных сил инерции переносного движения.

В турбине возможно как увеличение $H_{отн}$ (работа турбины по схеме фиг. 8-8), так и уменьшение (работа по схеме фиг. 8-9). Если $u_2 = u_1$, что имеет место в осевых насосах и турбинах, удельная энергия в относительном движении идеальной жидкости не изменяется.

В реальной жидкости одновременно с изменением $H_{отн}$ за счет работы центробежных сил инерции переносного движения эта энергия уменьшается, затрачиваясь на преодоление гидравлических сопротивлений, на h_n. Поэтому уравнение Бернулли для частицы реальной жидкости в ее относительном движении будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + h_n. \qquad (8\text{-}52)$$

Следует отметить, что приращение (положительное или отрицательное) энергии движущейся частицы в ее относительном движении

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

представляет собой только часть приращения энергии частицы в ее абсолютном движении.

В насосе удельная энергия в абсолютном движении увеличивается на $H_{нас}$ за счет работы, совершаемой рабочим колесом. В турбине удельная энергия в абсолютном движении уменьшается на $H_{тур}$ благодаря превращению ее в механическую энергию на валу турбины и гидравлическим сопротивлениям в канале. Для вычисления $H_{нас}$ и $H_{тур}$ надо воспользоваться формулами:

$$H_{нас} = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}\right), \qquad (8\text{-}53)$$

$$H_{тур} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}\right). \qquad (8\text{-}54)$$

В этом уравнении z и c — уже абсолютные координаты и абсолютные скорости частиц, т. е. частиц жидкости, расположенных на траектории, соответствующей абсолютному движению, или на линии тока, соответствующей тому же движению.

В формуле (8-53) правая часть определяет удельную энергию, которую жидкость приобретает при протекании через насос. В формуле (8-54) правая часть определяет энергию, которую жидкость теряет при протекании через турбину. Подставляя в уравнения (8-53) и (8-54) значения $p_2 - p_1$ из уравнения (8-52):

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = z_1 - z_2 + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - h_n,$$

вместо w_1^2 и w_2^2 их значения из треугольника скоростей (фиг. 8-8 и 8-9)

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 \cdot c_2 u_2 \cos \alpha_2,$$

$$w_1^2 = c^2 + u_1^2 - 2 \cdot c_1 u_1 \cos \alpha_1$$

и пренебрегая разностью z, получим:

$$H_{нас} + h_n = \frac{1}{g}(c_2 u_2 \cos \alpha_2 - c_1 u_1 \cos \alpha_1); \qquad (8\text{-}55)$$

$$H_{тур} - h_n = \frac{1}{g}(c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2). \qquad (8\text{-}56)$$

Для насоса правая часть уравнения (8-55) определяет удельную энергию, которую рабочее колесо передает протекающей жидкости. Для турбины правая часть уравнения (8-56) определяет удельную энергию, которую жидкость отдает только рабочему колесу турбины.

Глава девятая

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

9-1. Обобщенный закон трения

Обобщенный закон трения определяет силы трения, возникающие в потоке в общем случае движения. Так же как и для случая движения, рассмотренного в § 2-4, в общем случае напряжения сил трения оказываются

Фиг. 9-1. Схема распределения скоростей в криволинейном потоке.

Фиг. 9-2. Схема напряжений трения, возникающих на гранях прямоугольника.

пропорциональными угловым скоростям скашивания, причем коэффициентом пропорциональности является коэффициент вязкости. Иначе определяется лишь угловая скорость скашивания.

Рассмотрим частицу жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, равными δx, δy и δz. Определим скашивание угла DAB (фиг. 9-1), происходящее вследствие разности скоростей точки B на $\frac{\partial u_z}{\partial x}\delta x$ и точки D на $\frac{\partial u_z}{\partial z}\delta z$ относительно точки A.

Благодаря этому происходит (фиг. 9-2) поворот ребра AD с угловой скоростью скашивания $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ и ребра AB с угловой скоростью скашивания $\frac{\partial u_z}{\partial x}$. Общая угловая скорость скашивания прямого угла в плоскости xoz равна

$$\Omega_{xz}=\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \tag{9-1}$$

а напряжение силы трения, возникшей на гранях DC и BC,

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\Omega_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right). \tag{9-2}$$

В обозначении напряжения сил трения первый индекс указывает площадку действия силы, а второй — направление ее проекции. Например, τ_{xz}

обозначает напряжение силы трения, действующей на площадке, перпендикулярной к оси x, в направлении, параллельном оси z, а τ_{zx} — напряжение силы трения, действующей на площадке, перпендикулярной к оси z, но в направлении, параллельном оси x.

Аналогичные выражения получим и для

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\Omega_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \tag{9-3}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\Omega_{yz}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right). \tag{9-4}$$

Из приведенных рассуждений следует равенство напряжений сил трения, возникающих на взаимно перпендикулярных площадках во взаимно перпендикулярных направлениях.

Докажем это основное свойство напряжений сил трения из других соображений.

Для этого уравновесим силы, показанные на фиг. 9-3, присоединив к ним на основании принципа Даламбера силу инерции. На фигуре вместо сил показаны напряжения, а сила тяжести и сила инерции вообще не изображены. Составим уравнение моментов, например относительно оси y.

При составлении уравнения моментов необходимо учесть соответственно только силы трения, входящие в зависимости (9-2) и (9-4). Моменты других сил трения, а также сил давления, веса и инерции относительно соответствующих осей равны нулю или вследствие того, что силы параллельны оси, или вследствие того, что сумма их моментов в пределе при стремлении параллелепипеда к точке обращается в нуль. Вследствие этого получим.

Фиг. 9-3. Схема поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед в реальном потоке.

$$(\tau_{zx}\,\delta x\,\delta y)\,\delta z-(\tau_{xz}\,\delta y\,\delta z)\,\delta x=0,$$

откуда следует

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

При составлении уравнения моментов относительно осей x и z соответственно получим:

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

9-2. Свойство гидродинамического давления в реальной жидкости

Благодаря силам трения, возникающим в движущейся реальной жидкости, гидродинамическое давление в точке оказывается зависящим от направления, в отличие от давлений гидростатического или гидродинамического в идеальной жидкости.

Таким образом,

$$p_x \neq p_y \neq p_z.$$

Однако, как будет доказано ниже, в данной точке потока сумма трех значений гидродинамического давления, измеренных в трех взаимно перпендикулярных направлениях, есть величина, от этих направлений не зависящая.

Докажем, что $p_x + p_y + p_z = \text{idem}$.

Для этого в потоке жидкости выделим две трехгранные призмы *1* и *2* (фиг. 9.4), причем такие, чтобы грань *ab* одной призмы являлась гранью и другой. Ребра призмы параллельны соответствующим осям координат x, z и ξ, ζ.

Фиг. 9.4. Схема поверхностных сил, действующих на элементарную призму в реальном потоке.

Для обеих призм напряжения сил трения, действующих на взаимно перпендикулярных площадках, равны:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{\xi\zeta} = -\tau_{\zeta\xi}.$$

Рассматриваемые призмы находятся в движении под действием сил давления, трения и веса. Добавляя силы инерции, можно всю эту систему сил считать находящейся в равновесии, вследствие чего сумма проекций всех этих сил на соответствующие оси должна равняться нулю.

Так же как и при доказательстве свойства гидростатического давления, массовые силы в пределе при стремлении призмы к точке обратятся в нуль, вследствие чего, не вводя их в рассмотрение, будем считать находящимися в равновесии силы давления и трения. Спроектируем действующие на призму *1* силы на направление оси ζ и приравняем нулю сумму проекций всех сил; тогда получим.

$$p_\zeta bc - p_x\, ac \sin\alpha - p_z\, ab \cos\alpha - \tau_{zx}\, ab \sin\alpha - \tau_{xz}\, ac \cos\alpha = 0$$

Сумма проекций сил трения на торцах в пределе равна нулю.

Разделив на bc, получим:

$$p_\zeta = p_x \sin^2\alpha + p_z \cos^2\alpha + 2\tau_{xz} \sin\alpha \cos\alpha.$$

Спроектируем силы, действующие на призму *2*, на направление ξ и приравняем сумму проекций всех сил нулю. Получим:

$$-p_\xi bc + p_x\, ac \cos\alpha + p_z\, ab \sin\alpha - \tau_{zx}\, ab \cos\alpha - \tau_{xz}\, ac \sin\alpha = 0.$$

Разделив на bc, будем иметь:

$$p_\xi = p_x \cos^2\alpha + p_z \sin^2\alpha - 2\tau_{xz} \sin\alpha \cos\alpha.$$

Складывая p_ζ и p_ξ, найдем.

$$p_\xi + p_\zeta = p_x + p_z.$$

Так как в обоих случаях третьи оси координат y и η совпадают, то

$$p_y = p_\eta.$$

На основании последнего и в связи с предыдущим имеем:

$$p_\xi + p_\zeta + p_\eta = p_x + p_y + p_z. \tag{9.5}$$

Из равенства (9.5) следует, что *сумма трех значений гидродинамического давления в точке, взятых по трем произвольным, но обязательно по взаимно перпендикулярным направлениям, есть величина, не зависящая от положения системы координат*. Значит, для данной точки будет не зависимым от системы координат, а значит, и от направления и среднее арифметическое от их значений:

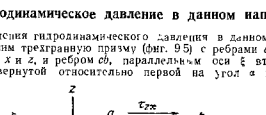
$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}, \tag{9.6}$$

называемое гидродинамическим давлением в данной точке.

Само собой разумеется, что при определении силы, действующей в некотором направлении, необходимо исходить из величины давления, соответствующего интересующему нас направлению.

9-3. Гидродинамическое давление в данном направлении

Для вычисления гидродинамического давления в данном направлении в потоке выделим трехгранную призму (фиг. 9.5) с ребрами ab и ac, параллельными осям x и z, и ребром cb, параллельным оси ξ второй системы координат, повернутой относительно первой на угол α вокруг оси y.



Фиг. 9.5. Схема поверхностных сил, действующих на элементарную призму в реальном потоке.

Рассматриваемая призма находится в движении под действием сил веса, давления и трения. Воспользуемся принципом Даламбера. Массовые силы в пределе при стремлении призмы к точке обращаются в нуль, поэтому в рассмотрение их не вводим. Составим уравнения равновесия сил, получим:

$$p_x\, ac \cos\alpha - p_z\, ab \sin\alpha - \tau_{xz}\, ac \sin\alpha - \tau_{zx}\, ab \cos\alpha - \tau_{\xi\zeta}\, cb = 0.$$

Разделив на cb, будем иметь:

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{xz}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (p_x - p_z) \sin\alpha \cos\alpha$$

С другой стороны, согласно (9.2)

$$\tau_{\xi\zeta} = \mu\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi}\right). \tag{9.7}$$

Преобразуем это уравнение, имея в виду, что

$$\xi = x\cos\alpha + z\sin\alpha; \quad \zeta = -x\sin\alpha + z\cos\alpha,$$

откуда

$$u_\xi = \xi' = u_x\cos\alpha + u_z\sin\alpha,$$
$$u_\zeta = \zeta' = -u_x\sin\alpha + u_z\cos\alpha.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial\zeta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\zeta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\zeta},$$

но так как в свою очередь

$$x = \xi\cos\alpha - \zeta\sin\alpha; \quad z = \xi\sin\alpha + \zeta\cos\alpha,$$

то

$$\frac{\partial x}{\partial\zeta} = -\sin\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial\zeta} = \cos\alpha,$$

поэтому

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial z}\cdot\cos\alpha - \frac{\partial u_\zeta}{\partial x}\cdot\sin\alpha.$$

Продифференцировав u_ζ по z и x, найдем:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot\sin\alpha,$$
$$\frac{\partial u_\xi}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u_z}{\partial x}\cdot\sin\alpha.$$

Подставляя эти значения в $\frac{\partial u_\xi}{\partial\zeta}$, получим:

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial\zeta} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot\cos^2\alpha - \frac{\partial u_z}{\partial z}\cdot\sin^2\alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\cdot\sin\alpha\cos\alpha$$

Поступая аналогично, будем иметь

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial\xi} = \frac{\partial u_z}{\partial x}\cdot\cos^2\alpha - \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot\sin^2\alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\cdot\sin\alpha\cos\alpha$$

Подставим найденные значения в (9.7):

$$\tau_{\xi\zeta} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\cos^2\alpha - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\sin^2\alpha + 2\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha\right],$$

но согласно (9.2)

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

поэтому

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{xz}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\mu\sin\alpha\cos\alpha\cdot\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

Сопоставляя $\tau_{\xi\zeta}$ с ранее найденным значением, которое вновь выпишем здесь:

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{xz}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (p_x - p_z)\sin\alpha\cos\alpha,$$

найдем, что

$$p_x - p_z = 2\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

Отсюда следует, что

$$p_x + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} = p_z + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

и вообще

$$p_x + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} = p_y + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} = p_z + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = C,$$

или

$$C = \frac{p_x + p_y + p_z}{3} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Вводя вместо $\frac{p_x + p_y + p_z}{3} = p$, получим

$$p_x + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

и окончательно

$$p_x = p - 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Соответственно предыдущему будем иметь также

$$\left.\begin{aligned} p_y &= p - 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \\ p_z &= p - 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9.8)$$

Для несжимаемых жидкостей справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Вследствие этого величины гидродинамического давления для соответствующих направлений будут определяться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= p - 2\mu\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ p_y &= p - 2\mu\cdot\frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ p_z &= p - 2\mu\cdot\frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (9.9)$$

9-4. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье-Стокса)

Для вывода дифференциальных уравнений движения реальной жидкости выделим в потоке элементарный параллелепипед, ребра которого δx, δy и δz параллельны соответствующим произвольно расположенным осям координат (фиг. 9-6) и масса которого δM.

Фиг. 9-6 Схема поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед в реальном потоке.

Рассматриваемый параллелепипед находится в движении под действием сил давления δP_i, трения δT_i и веса $\delta G = g \cdot \delta M$.

Геометрическая сумма действующих сил должна равняться произведению массы параллелепипеда $\delta M = \rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z$ на вектор ускорения движения его центра $a = \frac{d\bar{u}}{dt}$.

$$\sum_{i=1}^{6} \delta \bar{P}_i + \sum_{i=1}^{6} \delta \bar{T}_i + \delta \bar{G} = \delta M \cdot \frac{d\bar{u}}{dt}. \qquad (9\text{-}10)$$

Преобразование этого уравнения приводит к дифференциальным уравнениям движения реальной жидкости (капельной и газа) — уравнениям Навье-Стокса

Для получения этих уравнений спроектируем векторное уравнение (9-10), например, на ось x. Обозначим давление в центре параллелепипеда и в направлении оси x через p_x.

Получим:

$$\delta P_1 - \delta P_2 + (\delta T_3)_x + (\delta T_4)_x + (\delta T_5)_x + (\delta T_6)_x + \delta G_x = \delta M \cdot \frac{du_x}{dt}. \qquad (9\text{-}11)$$

Проекция силы $\delta P_1 = \left(p_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \delta x\right) \delta y\, \delta z$;

" " $\delta P_2 = \left(p_x + \frac{1}{2} \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \delta x\right) \delta y\, \delta z$;

" " $(\delta T_3)_x = -\tau_{yx}\, \delta x\, \delta z$ (см. фиг. 9-3);

" " $(\delta T_4)_x = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \delta y\right) \delta x\, \delta z$;

" " $(\delta T_5)_x = -\tau_{zx}\, \delta x\, \delta y$ (см. фиг. 9-3);

" " $(\delta T_6)_x = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\, \delta z\right) \delta x\, \delta y$;

" $\delta G_x = X \rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z$.

В последних уравнениях X обозначает проекцию на ось x ускорения только силы тяжести g, а $\frac{du_x}{dt}$ проекцию на ось вектора ускорения движения $\frac{d\bar{u}}{dt}$.

Проекции остальных сил на ось x равны нулю, так как силы перпендикулярны к оси проекции

Подставляя найденные значения сил в уравнение (9-11) и сокращая на $\rho\, \delta x \delta y \delta z$, т. е. относя уравнение движения к единице массы, получаем:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \frac{du_x}{dt} \qquad (9\text{-}12)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены и в проекциях на оси y и z:

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) = \frac{du_y}{dt}, \qquad (9\text{-}13)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) = \frac{du_z}{dt}. \qquad (9\text{-}14)$$

В дальнейшем приведем подробные преобразования лишь для уравнения (9-12). Подставляя в это уравнение согласно уравнению (9-8)

$$p_x = p - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\, \partial z}\right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\, \partial z}\right),$$

будем иметь:

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}\right) = \frac{du_x}{dt},$$

или

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{du_x}{dt}. \qquad (9\text{-}15)$$

и по аналогии для других осей

$$Y = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{du_y}{dt}; \tag{9-16}$$

$$Z = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{du_z}{dt}. \tag{9-17}$$

Для капельной жидкости дифференциальные уравнения движения упрощаются, так как из уравнения неразрывности для капельной жидкости следует, что

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Вследствие этого равенства дифференциальные уравнения движения примут вид:

$$X = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \frac{du_x}{dt}, \tag{9-18}$$

$$Y = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = \frac{du_y}{dt}, \tag{9-19}$$

$$Z = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) = \frac{du_z}{dt}. \tag{9-20}$$

Уравнения (9-15) — (9-17) и (9-18) — (9-20) называются уравнениями Навье-Стокса. При $\mu = 0$ эти уравнения обращаются в уравнения Эйлера.

Исследуем уравнения (9-18) — (9-20) для потенциального движения. Воспользовавшись зависимостями (7-17), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right).$$

аналогично получим и для

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Подставляя эти значения в уравнение (9-18), найдем.

$$X = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{du_y}{dt}.$$

Но согласно уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому уравнения Навье-Стокса для потенциального движения будут иметь следующий вид.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt};\\ Y &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt},\\ Z &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{9-2}$$

т. е. по виду эти уравнения не отличаются от уравнений Эйлера. Однако следует иметь в виду, что в этих уравнениях в отличие от уравнений Эйлера

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}.$$

Н. Е. Жуковский указывал, что „При существовании потенциала скоростей вязкость не оказывает влияния на движение внутри жидкости, а также не влияет на распределение давлений внутри ее. Влияние вязкости при существовании потенциала скоростей может проявляться при стенках сосуда, на которых должны быть соблюдены граничные условия"[1].

Глава десятая

ДИНАМИКА ПОТОКА

В настоящей главе рассмотрены различные закономерности, относящиеся к потоку жидкости. Основная задача этой главы — распространить на поток в целом зависимости, полученные для элементарной струйки.

10-1. Живое сечение потока

Весьма важной характеристикой формы потока является его живые сечения.

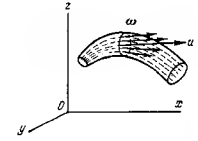
Живым сечением потока называется поверхность, являющаяся геометрическим местом частиц жидкости, скорости которых перпендикулярны к соответствующим элементам поверхности. Так как векторы скоростей частиц направлены по касательной к линиям тока, то живое сечение потока можно определить как поверхность, ортогональную к линиям тока (фиг. 10-1).

В турбулентных потоках в общем случае под живыми сечениями потока подразумеваются сечения, ортогональные к местным осредненным скоростям.

Площадь живого сечения ω складывается из площадей живых сечений элементарных струек $\omega = \Sigma\omega_i$. Живое сечение ограничено ложем потока (естественным или искусственным). Это огра-

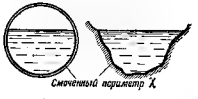
[1] Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, „Теоретические основы воздухоплавания, ч. I, стр. 350, ОНТИ НКТП СССР, 1938

ничение может быть полным (фиг. 10-2) или частичным (фиг. 10-3 и 10-4). Периметр сечения ложа, совпадающий с периметром живого сечения потока, называется смоченным пери-



Фиг. 10-1. Живое сечение потока ортогонально к линиям тока.

Фиг. 10-2. Живое сечение потока в цилиндрической трубе при напорном движении.



Фиг. 10-3. Живое сечение потока в безнапорном движении.

Фиг. 10-4. Живое сечение в прямоугольном канале.

метром ложа и обозначается буквой χ. По фиг. 10-3 и 10-4 смоченный периметр ложа меньше периметра площади живого сечения потока. Такой поток называется безнапорным.

Отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру ложа называется гидравлическим радиусом R:

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \tag{10-1}$$

Как увидим в дальнейшем, гидравлический радиус явится весьма важной характеристикой и формы потока и формы ложа. Гидравлический радиус круглого трубопровода с радиусом r, полностью заполненного движущейся жидкостью, равен:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{r}{2}.$$

Для потока со свободной поверхностью глубиной h в прямоугольном канале шириной b

$$R = \frac{bh}{2h + b}.$$

10-2. Расход потока

Расходом потока называется количество жидкости, протекающее через некоторое поперечное сечение потока в единицу времени. Это сечение должно быть сделано так, чтобы оно обязательно пересекало каждую элементарную струйку и только один раз. Обычно за поверхность сечения принимают живое сечение потока.

Расход потока выражается или в весовых единицах, например в *кГ/сек*, или в массовых единицах, например в *кГ·сек/м*, или в объемных, например в *м³/сек*. В первом случае расход будет называться весовым, во втором — массовым и в третьем — объемным. Весовой расход будем обозначать буквой G, массовый — M и объемный — Q.

Между весовым, массовым и объемным расходом существует зависимость, определяемая формулой

$$G = gM = g\rho Q = \gamma Q, \tag{10-2}$$

где g — ускорение силы тяжести;
ρ — плотность;
γ — объемный вес.

В дальнейшем будем говорить чаще всего лишь об объемном расходе Q.

Расход потока Q складывается из расходов элементарных струек и определяется по формуле

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u\,d\omega, \tag{10-3}$$

где $d\omega$ — живое сечение элементарной струйки.

Для аналитического вычисления расхода необходимо знать закон распределения скоростей по сечению потока.

Формула (10-3) может служить также и для экспериментального определения расхода. В этом случае разбивают площадь живого сечения на достаточное число элементарных площадок $\delta\omega$ и опытным путем определяют скорость u в центре каждой площадки. Интегрирование заменяют суммированием произведений $u\delta\omega$.

$$Q = \Sigma\delta Q = \Sigma u\,\delta\omega$$

Для определения расходов существуют специальные приборы. Некоторые типы приборов будут описаны в гл. 16.

10-3. Средняя скорость потока

Исследование скоростей по живому сечению потока показывает их неравномерное распределение.

Например, в ламинарном движении скорости по сечению распределяются по параболическому закону. В турбулентном движе-

нии распределение местных осредненных скоростей подчиняется приблизительно показательному или логарифмическому закону. Вместе с тем для многих гидравлических закономерностей оказывается целесообразным ввести в рассмотрение некоторую фиктивную так называемую среднюю скорость потока

Средней по живому сечению скоростью потока называется скорость, вычисляемая по формуле

$$v = \frac{\int_{\omega} u\,d\omega}{\omega} \qquad (10\text{-}4)$$

Так как интеграл $\int_{\omega} u d\omega = Q$, т. е. равен расходу жидкости через данное живое сечение, то средняя скорость может быть вычислена через расход по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} \qquad (10\text{-}5)$$

Среднюю скорость можно также рассматривать как среднее значение объемного расхода, отнесенного к единице площади живого сечения.

10-4. Уравнение неразрывности потока

Распространим уравнение неразрывности для элементарной струйки на струйный поток.

Воспользуемся формулой (8-11)

$$\rho_1 u_1 \delta\omega_1 = \rho_2 u_2 \delta\omega_2.$$

Напомним, что это уравнение справедливо для установившегося движения любой жидкости, как капельной, так и сжимаемой (газа).

Взяв интеграл от левой и правой частей и распространив его по всей площади живого сечения, получим

$$\int_{\omega_1} \rho_1 u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 d\omega_2.$$

Как известно, левый и правый интегралы определяют массовый расход жидкости через живые сечения ω_1 и ω_2. Поэтому предыдущее выражение может быть переписано в виде

$$M_1 = M_2,$$

или

$$M = \text{idem}, \qquad (10\text{-}6)$$

т. е. *массовый расход по длине установившегося потока имеет одно и то же значение.*

Для капельной жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому

$$\int_{\omega_1} u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} u_2 d\omega_2,$$

или, что то же самое,

$$Q_1 = Q_2,$$

или

$$Q = \text{idem}, \qquad (10\text{-}7)$$

т. е. *объемный расход капельной жидкости по длине установившегося потока имеет одно и то же значение.*

Имея в виду, что согласно формуле (10-5)

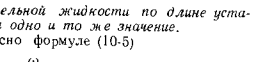
$$Q = v\omega,$$

из уравнения (10-7) получим, что (фиг 10-5)

$$v_1\omega_1 = v_2\omega_2 = v_3\omega_3, \qquad (10\text{-}8)$$

откуда, например,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$



Фиг 10-5 Схема потока с переменным живым сечением.

т. е. *средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений потока.*

Заметим, что формула (10-8) справедлива и для неустановившегося движения капельной жидкости, происходящего в полностью заполненном жестком трубопроводе, так как в этом случае в формуле (8-16) $\delta\omega$ не зависит от времени, т. е $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) = 0$.

10-5. Мощность потока N в данном живом сечении потока

В связи с необходимостью в дальнейшем распространить уравнение Бернулли (8-40), полученное для элементарной струйки, на поток полезно ввести понятия мощности потока в данном сечении и инерционной мощности потока длиной l. Инерционная мощность будет разобрана в следующем параграфе.

Мощностью потока в данном живом сечении назовем энергию, которой обладает протекающая через живое сечение масса жидкости, равная секундному расходу.

Мощность потока N [*кГ·м/сек*] слагается (фиг. 10-6) из мощностей элементарных струек:

$$dN = H_{гд} \cdot dG, \qquad (10\text{-}9)$$

где

$H_{гд} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ — удельная энергия частицы, *м*, $dG = \gamma u d\omega$ весовой расход элементарной струйки, *кГ сек*.

Таким образом,

$$N = \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) \cdot \gamma u \, d\omega. \qquad (10\text{-}10)$$

Для вычисления мощности потока надо было бы знать закон распределения давления и скоростей по живому сечению потока, что, однако, в общем случае неизвестно. Значение этого интеграла можно найти и графоаналитическим способом, а именно, разбивают живое сечение на элементарные площадки и для каждой из них находят z, p и u, а затем и dN. Мощность потока определяют как сумму элементарных мощностей $\Sigma\, dN$.

Фиг. 10-6. Схема струйного потока.

Для вычисления мощности потока необходимо найти значение интеграла

$$K = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho u^3 \, d\omega.$$

Этот интеграл представляет собой значение кинетической энергии, которой обладает протекающая через данное живое сечение масса жидкости, равная секундному расходу. Для его вычисления необходимо знать закон распределения скоростей по живому сечению потока. Вычисления этого интеграла показывают, что

$$\int u^3 \, d\omega \neq v^3 \omega.$$

Введем коэффициент кинетической энергии — α

$$\alpha = \frac{\int u^3 \, d\omega}{v^3 \omega}. \qquad (10\text{-}11)$$

Значение коэффициента α в большинстве случаев можно определить только опытным путем. Теоретически вычислить его возможно лишь для ограниченного вида движений (например, для некоторых случаев ламинарного движения, для турбулентного движения в круглых трубопроводах).

В турбулентном движении при больших значениях чисел Re в прямых трубопроводах среднее значение коэффициента α приблизительно равно $\alpha = 1{,}1$. В некоторых случаях ламинарного движения $\alpha = 2$.

В других случаях с более неравномерным распределением скоростей коэффициент α может принимать и бо́льшие значения.

Так, например, по опытам И. Г. Есьмана в сечениях на участке $bcmn$ внезапного расширения (фиг. 15-6) значение коэффициента α может доходить до 5 и больше.

Если бы скорость во всех точках живого сечения была одинакова, то α равнялось бы единице. Следовательно, значение коэффициента α, который, как следует из формулы, безразмерен, зависит от неравенства скоростей отдельных частиц данного сечения, или, как говорят, от степени неравномерности распределения скоростей по живому сечению. Коэффициент α является поправкой к значению кинетической энергии секундной массы, вычисленной по средней скорости. Действительно, кинетическая энергия K массы жидкости, протекающей в единицу времени через все живое сечение, т. е. массового расхода M, определится по формуле

$$K = \int_{\omega} dM \cdot \frac{u^2}{2},$$

где $dM = \rho u \, d\omega$ — масса жидкости, протекающей через сечение элементарной струйки в единицу времени, т. е. элементарный массовый расход. Подставляя, получим:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int \rho u^3 \, d\omega.$$

Кинетическая энергия той же секундной массы $M = \rho v \omega$, но вычисленная по средней скорости будет:

$$K' = \frac{1}{2} \cdot \rho v^3 \omega.$$

Отношение действительного значения кинетической энергии к ее значению, вычисленному по средней скорости, будет равно:

$$\frac{K}{K'} = \frac{\int_{\omega} \rho u^3 \, d\omega}{\rho v^3 \omega} = \alpha. \qquad (10\text{-}12)$$

Вводя коэффициент α, можем определить K по формуле

$$K = \frac{1}{2} \cdot \alpha \rho v^3 \omega. \qquad (10\text{-}13)$$

10-6. Инерционная мощность потока

Инерционной мощностью потока (фиг. 10 6) назовем выражение

$$N_и = \int_\omega h_и \gamma u \, d\omega,$$

где $h_и = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dl$ — инерционный напор элементарной струйки длиной l.

Подставляя значение $h_и$ в N', будем иметь:

$$N_и = \int_\omega \left(\int_0^l \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \, dl \right) d\omega.$$

Этот интеграл можно представить и в виде.

$$N_и = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_\omega \rho u^2 \, d\omega \right) dl.$$

Рассмотрим сперва интеграл

$$q = \int_\omega \rho u^2 \, d\omega.$$

Интеграл q отличается от интеграла K, кроме постоянного множителя, еще и тем, что под интегралом стоит скорость не в третьей, а во второй степени. Этот интеграл представляет собой количество движения, которым обладает протекающая через данное живое сечение масса жидкости, равная секундному расходу. Для его вычисления также необходимо знать закон распределения скоростей по живому сечению потока.

Вычисления этого интеграла дают, что

$$\int_\omega \rho u^2 \, d\omega \neq \rho v^2 \omega.$$

Введем коэффициент количества движения β

$$\beta = \frac{\int_\omega \rho u^2 \, d\omega}{\rho v^2 \omega}. \qquad (10\ 14)$$

Для вычисления коэффициента β необходимо также знать закон распределения скоростей по площади живого сечения потока. В некоторых случаях ламинарного движения $\beta = 1{,}33$. В турбулентном движении в круглой трубе его можно принимать равным $\beta = 1{,}04$. В других случаях коэффициент β

вычисляется на основании опытных данных, аналогично коэффициенту α.

Коэффициент β, так же как и коэффициент α, характеризует степень неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока, но в отличие от α коэффициент является поправкой к значению количества движения секундной массы, вычисленной по средней скорости.

Вводя коэффициент β, можно определить q через среднюю скорость, а именно

$$q = \int_\omega \rho u^2 \, d\omega = \beta \rho v^2 \omega = \beta \rho Q v. \qquad (10\text{-}15)$$

В связи с формулой (10 15) инерционная мощность может быть вычислена по формуле

$$N_и = \frac{\gamma}{2g} \cdot \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (\beta v^2 \omega) \, dl,$$

или

$$N_и = \frac{\gamma}{g} \cdot \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl \, Q,$$

или

$$N_и = \gamma Q \cdot \frac{1}{g} \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl. \qquad (10\text{-}16)$$

Назовем инерционным напором потока $H_и$ (удельной инерционной мощностью) отношение $N_и$ к γQ. Из формулы (10-16) получим:

$$H_и = \frac{1}{g} \cdot \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl. \qquad (10\text{-}17)$$

Для трубопровода постоянного сечения

$$H_и = \beta \frac{l}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (10\ 18)$$

где

$$l = \int_0^l dl.$$

10-7. Уравнение Бернулли для неустановившегося и установившегося потока реальной капельной жидкости

Распространим уравнение Бернулли (8-40), полученное для элементарной струйки, в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n + h_u$$

на поток. Для этого умножим левую и правую части уравнения на весовой расход элементарной струйки $dG = \gamma u\, d\omega$, возьмем интеграл от обеих частей уравнения, распространив его на соответствующие площади живых сечений ω_1 и ω_2. Получим

$$\int_{\omega_1}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)\gamma u\, d\omega = \int_{\omega_2}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)\gamma u\, d\omega +$$

$$+ \int_{\omega_1} h_n \gamma u\, d\omega + \frac{1}{g}\int_{\omega}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dl\, \gamma u\, d\omega.$$

Первые два интеграла представляют согласно § 10-5 мощности потока N_1 и N_2 в первом и втором живом сечении потока. Интеграл $\int_{\omega_1} h_n \gamma u\, d\omega = N_n$ определяет потерю потоком мощности, вызванную гидравлическим сопротивлением.

Интеграл $\frac{1}{g}\int_{\omega}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\cdot dl\, \gamma u\, d\omega = N_u$ представляет инерционную мощность потока.

В связи с этим предыдущее уравнение можно рассматривать как уравнение баланса мощностей:

$$N_1 = N_2 + N_n + N_u. \qquad (10\text{-}19)$$

Разделив каждый член этого уравнения на весовой расход и обозначая через

$\frac{N}{\gamma Q} = E$ — удельную мощность потока (удельную энергию),

$\frac{N_u}{\gamma Q} = H_u$ — удельный инерционный напор (удельную инерционную мощность потока),

$\frac{N_n}{\gamma Q} = h_n$ — потери удельной мощности потока (удельной энергии),

можем уравнение Бернулли представить в виде:

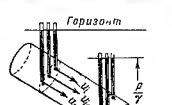
$$E_1 = E_2 + h_n + H_u. \qquad (10\text{-}20)$$

В дальнейшем уравнение Бернулли будет применяться только для таких участков потока, в крайних живых сечениях которых давление распределяется или по гидростатическому закону[1] (фиг. 10-7)

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem},$$

или во всех точках живого сечения давление имеет одно и то же значение[2]

$$p = \text{idem}.$$



Фиг. 10-7. При гидростатическом распределении давлений в живом сечении потока уровни в пьезометрах достигают одной и той же высоты, по разной в разных живых сечениях

В связи с этим потребуется для таких сечений потока определять значения удельных энергий. Рассмотрим оба случая.

Из формулы (10-19) и (10-20) для $z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}$ имеем

$$E = \frac{N}{\gamma Q} = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)\int_{\omega}\gamma u\, d\omega + \frac{\gamma}{2g}\int_{\omega} u^3\, d\omega,$$

или в связи с (10-3) и (10-13)

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \qquad (10\text{-}21)$$

Для этого случая уравнение Бернулли (10-20) может быть переписано в виде: для неустановившегося движения

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_0^l \beta\, \frac{\partial v}{\partial t}\, dl + h_n \qquad (10\text{-}22)$$

и для установившегося движения

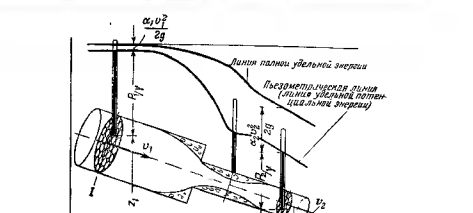
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n. \qquad (10\text{-}23)$$

В формулах (10-22) и (10-23) p_1 и p_2 суть абсолютные давления в двух произвольно взятых точках в сечениях ω_1 и ω_2 с координатами z_1 и z_2 (фиг. 10-8).

---

[1] Укажем, что, как это следует из уравнения (8-29), гидростатический закон распределения давлений имеет место только в прямолинейном движении, т. е., строго говоря, только в ламинарном движении, однако приближенно такой закон принято распространять и на осредненное прямолинейное турбулентное движение.

[2] Например, свободная поверхность жидкости в резервуаре или сечение свободной струи.



Фиг. 10.8. Диаграмма уравнения Бернулли для реального установившегося потока, ограниченного сечениями с гидростатическим распределением давления.

В связи с уравнением (10.22) заметим, что в неустановившемся движении влияние инерционного напора в потоке на энергию потока проявляется так же, как и в элементарной струйке (§ 8.6).

В том случае, если в рассматриваемом сечении $p = \text{idem}$, для вычисления E необходимо уметь вычислить, кроме интеграла K, интеграл $\gamma \cdot \int_{\omega} z dQ$, т. е. находить центр массы, соответствующий секундному расходу. Этот интеграл может быть выражен через z_T — координату центра тяжести площади живого сечения

$$\gamma \int_{\omega} z dQ = \xi \gamma z_T Q,$$

где ξ — коэффициент, определяемый по формуле

$$\xi = \frac{\int_{\omega} z dQ}{z_T Q}. \tag{10-24}$$

Если в обоих живых сечениях, ограничивающих рассматриваемую длину потока, $p = \text{idem}$, то уравнение Бернулли должно быть представлено в виде:

$$\xi_1 z_{T_1} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \xi_2 z_{T_2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_1^2 \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} dl + h_n \tag{10-25}$$

и для установившегося движения

$$\xi_1 z_{T_1} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \xi_2 z_{T_2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n. \tag{10-26}$$

На фиг. 10.8 построена диаграмма уравнения Бернулли для участка установившегося потока реальной жидкости, ограниченного сечениями с гидростатическим законом распределения давления. Диаграмма строится аналогично диаграмме уравнения Бернулли для элементарной струйки. При этом значения величин z и p в каждом сечении должны соответствовать обязательно одной и той же точке[1].

Фиг. 10.9. Диаграмма уравнения Бернулли для равномерного реального установившегося потока.

В уравнении Бернулли остался совершенно невыясненным член, определяющий потери удельной энергии в потоке, обусловленные гидравлическими сопротивлениями; этот вопрос будет рассмотрен в соответствующих местах учебника.

Следует обратить внимание на тот факт, что обязательное падение линии полной удельной энергии в общем случае не вызывает обязательного падения линии полной потенциальной энергии (пьезометрической линии). Эта линия на отдельных участках может и повышаться, что зависит от конфигурации потока.

Падение линии полной удельной энергии характеризуется так называемым гидравлическим уклоном

$$J = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right). \tag{10-27}$$

Гидравлический уклон можно рассматривать как потери удельной энергии потока, отнесенные к единице длины потока.

Форма пьезометрической линии характеризуется пьезометрическим уклоном

$$J_n = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \tag{10-28}$$

Пьезометрический уклон можно рассматривать также как изменение потенциальной энергии потока, отнесенное к единице длины потока.

[1] При построении диаграммы отклонением от гидростатического закона распределения давлений в промежуточных сечениях пренебрегаем, что, однако, не всегда допустимо.

Отметим, что гидравлический уклон J всегда положителен, в то время как пьезометрический $J_п$ в зависимости от конфигурации потока может быть и положительным и отрицательным.

В потоке с одинаковой скоростью по длине (фиг. 10 9)

$$v = \text{idem},$$

$$J = J_п - \frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \qquad (10\text{-}29)$$

10-8. Примеры гидравлических расчетов установившихся и неустановившихся потоков без учета гидравлических сопротивлений

Оставляя пока без рассмотрения вопрос об определении потери удельной энергии вследствие сопротивлений, возникающих в жидкости при движении, разберем несколько примеров без учета этих потерь. В таких случаях основными уравнениями являются уравнения Бернулли для потока, но без учета потерь энергии и уравнение неразрывности.

Напомним, что при применении уравнения Бернулли в форме (10-22) и (10-23) поток в общем случае может иметь по длине сложную конфигурацию, однако в сечениях, которые ограничивают длину рассчитываемого участка потока, давления должны распределяться по гидростатическому закону. Необходимо также, чтобы значения z и p в каждом сечении соответствовали одной и той же точке.

Задача 10-1. Построить диаграмму Бернулли, пренебрегая сопротивлением, для водовода при следующих условиях

Система состоит из резервуара и трубы переменного сечения, оканчивающейся коническим сходящейся короткой трубкой (фиг. 10 10).

1. Высота уровня воды в резервуаре над выходным отверстием $h = 25$ *м*. На свободной поверхности давление равно атмосферному.

2. Диаметры трубы $d_1 = 0{,}053$ *м*, $d_2 = 0{,}100$ *м*, $d_3 = 0{,}052$ *м*; $d_4 = 0{,}040$ *м*.

Решение.

При закрытой трубе, т. е. в случае полов жидкости полная удельная энергия жидкости равна сумме удельной потенциальной энергии положения и давления.

Так как все точки покоящейся жидкости обладают одинаковой энергией, то ее легче всего определить по точке, находящейся на свободной поверхности воды в резервуаре. Плоскость сравнения выбираем проходящей через центр выходного отверстия. Очевидно, эта энергия равна

$$H = z + \frac{p}{\gamma} = 35 \text{ м},$$

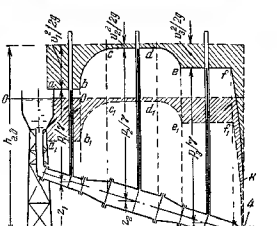
где $z = h = 25$ *м*, $\frac{p}{\gamma} = 10$ *м* (принимаем давление атмосферы равным 10 000 *кГ/м²*, а $\gamma = 1\,000$ *кГ/м³*).

Линия энергии для покоящейся жидкости будет горизонтальной прямой (показана пунктиром), расположенной на высоте 35 *м*. Статическое давление

в любом сечении трубы будет определяться столбом жидкости высотой $\frac{p}{\gamma}$, который на диаграмме представлен отрезком, заключенным между пунктирной линией энергии и осью трубопровода в соответствующем сечении трубы.

В случае движения положение пьезометрической линии меняется. Для построения диаграммы необходимо определить скорость течения жидкости в различных частях водовода. Сначала определим скорость в сечении на выходе.

Для этой цели сначала напишем уравнение Бернулли для двух сечений: первое сечение ($0-0$) выбираем на свободной поверхности воды в резервуаре; второе ($4-4$) — в плоскости выходного отверстия.



Фиг. 10-10. Диаграмма уравнения Бернулли. К задаче 10 1.

В рассматриваемом случае в сечении $0-0$ давления распределяются по гидростатическому закону, а в сечении $4-4$ давление $p = \text{idem}$.

Поэтому уравнение Бернулли должно быть представлено в виде:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \xi_4 z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{\alpha_4 v_4^2}{2g}.$$

Определим значение каждого из членов уравнения Бернулли.

В рассматриваемом случае коэффициенты α_4 и ξ_4 можно принять равными единице

$$\xi_4 = 1, \quad \alpha_4 = 1,$$

а плоскость сравнения принять, как показано на фигуре. При этом

$$z_0 = h = 25 \text{ м}; \quad z_4 = 0; \quad v_0 = 0;$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10 \text{ м}, \quad \frac{p_4}{\gamma} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10 \text{ м}.$$

(давление на выходе из трубы в атмосферу принимаем равным атмосферному).

Подставляя найденные значения в уравнение Бернулли, получаем

$$h = \frac{v_4^2}{2g},$$

откуда

$$v_4 = \sqrt{2g \cdot 25} = 22{,}15 \text{ м/сек}.$$

Применяя уравнение неразрывности, определим скорости и в остальных сечениях трубы

$$v_3 = v_4\left(\frac{d_4}{d_3}\right)^2 = 22{,}15\cdot\left(\frac{0{,}040}{0{,}062}\right)^2 = 9{,}215\ м/сек,$$

$$v_2 = v_4\left(\frac{d_4}{d_2}\right)^2 = 22{,}15\left(\frac{0{,}040}{0{,}100}\right)^2 = 3{,}544\ м/сек,$$

$$v_1 = v_4\left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2 = 22{,}15\left(\frac{0{,}040}{0{,}053}\right)^2 = 12{,}616\ м/сек.$$

Так как сопротивления нами не учитываются (жидкость рассматривается идеальной), то гидродинамический напор (полная удельная энергия) вдоль потока остается величиной постоянной, т. е. линия гидродинамического напора будет горизонтальна.

Положение этой линии определится, если будет известен гидродинамический напор какой-либо точки, например точки, расположенной на поверхности жидкости в резервуаре.

$$H_{гд} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Так как $v_0 \approx 0$,

$$H_{гд} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = 25 + 0 = 25\ м.$$

Таким образом, линия полной удельной энергии (гидродинамического напора) расположится в горизонтальной плоскости на высоте $H_{гд} = 25$ м над плоскостью сравнения. Для построения пьезометрической линии (линии потенциальной удельной энергии) вычислим скоростные напоры

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{12{,}616^2}{2\cdot 9{,}81} = 8{,}169\ м,\quad \frac{v_3^2}{2g} = \frac{9{,}215^2}{2\cdot 9{,}81} = 4{,}330\ м,$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{3{,}544^2}{2\cdot 9{,}81} = 0{,}639\ м,\quad \frac{v_4^2}{2g} = \frac{22{,}150^2}{2\cdot 9{,}81} = 25\ м.$$

При построении диаграммы допускаем, что во всех сечениях площадь живого сечения определяется соответствующему диаметру трубопровода.

Отложив вниз от линии полной удельной энергии значения скоростного напора, имея при этом в виду, что в трубе на участках с постоянным сечением скоростной напор имеет одно и то же значение, получим пьезометрическую линию (линию $abcdefk$)

Линия геометрического напора (удельной энергии положения) совпадает с осью трубопровода.

В любом сечении гидродинамическое давление определяется вертикальным отрезком, заключенным между линией геометрического напора и пьезометрической линией. Здесь следует отметить, что изображенное на диаграмме давление есть давление абсолютное. Для избыточного давления линия полной удельной энергии и пьезометрическая линия расположатся соответственно ниже на 10 м, как показано пунктиром, т. е. линия полной удельной энергии расположится горизонтально в плоскости свободной поверхности жидкости в резервуаре на высоте 25 м над плоскостью сравнения, а пьезометрическая линия изобразится линией $a_1b_1c_1d_1e_1f_1k_1$.

Задача 10-2. Закон движения жидкости в трубопроводе, присоединенном к воздушному колпаку (без учета гидравлических сопротивлений).

Рассмотрим движение жидкости в трубе длиной L постоянного сечения ω, присоединенной к воздушному колпаку (фиг. 10-11). Объем W воздушного колпака заполнен сжатым воздухом или каким-либо другим газом

В положении покоя уровень жидкости в трубопроводе находится на высоте z_0 над начальным уровнем жидкости в воздушном колпаке. Это положение назовем равновесным положением. Этому положению в газовом пространстве колпака соответствует давление $p_0 = p_{ат} + \gamma z_0$, объем газа W_0, $y = 0$.

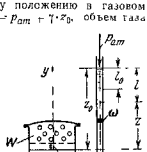
Переместим принудительно столб жидкости на l_0. Благодаря этому давление в газовом пространстве увеличится соответственно уменьшению объема

Изменение давления будет подчиняться закону

$$pW = p_0W_0 = C,$$

откуда

$$\frac{dp}{dW} = -\frac{C}{W^2} = -\frac{p_0W_0}{W^2} \approx -\frac{p_0}{W_0}.$$



Фиг. 10-11. Трубопровод, присоединенный к воздушному колпаку. К задаче 10-2

Имея в виду, что

$$dW = -F_к dy,$$

где $F_к$ — площадь сечения воздушного колпака;

dy — уменьшение высоты газового пространства в колпаке, получим

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p_0F_к}{W_0},$$

интегрируя, найдем

$$\int_{p_0}^{p_к} dp = \int_0^y \frac{p_0F_к}{W_0}\,dy,$$

или

$$p_к = p_0 + \frac{p_0F_к}{W_0}\,y,$$

где $p_к$ — переменное давление в газовом пространстве колпака, соответствующее уровню жидкости в нем.

Если теперь предоставить жидкость самой себе, то газовая подушка, выполняя роль пружины, в дальнейшем заставит жидкость, предоставленную самой себе, двигаться к равновесному положению. Благодаря инерции столб жидкости в равновесном положении не остановится и будет продолжать двигаться в том же направлении, т. е. от колпака. Это вызовет уменьшение давления в колпаке по сравнению с p_0 и при $p_{ат} = соnst$ заставит жидкость двигаться с замедлением вплоть до остановки. Движение, если пренебречь сопротивлением, будет подчиняться уравнению Бернулли (10.22) и (10-25) для неустановившегося движения (при $\xi = 1$, а $h_п = 0$)

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{l}{g}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\,dl$$

Если пренебречь массой жидкости в колпаке и скоростными напорами, последнее уравнение для некоторого промежуточного положения, характеризуемого координатами свободных уравнений $z_1 = y$ и $z_2 = z$ и соответственно $p_1 = p_к$ и $p_2 = p_{am}$, может быть представлено в виде

$$y + \frac{p_к}{\gamma} = z + \frac{p_{am}}{\gamma} + \frac{\beta L}{g} z'',$$

где L — длина колеблющегося столба жидкости в трубе, а

$$z'' = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Имея в виду, что

$$z = z_0 - l, \text{ а } z'' = -l'',$$

где l — координата, определяющая положение свободного уровня в трубопроводе от его начального, а l'' — вторая производная по времени, получим.

$$y + \frac{p_к}{\gamma} = z_0 - l + \frac{p_{am}}{\gamma} - \frac{\beta L}{g} l''.$$

Подставляя значение $p_к$, будем иметь:

$$y + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{p_0 F_к}{\gamma W_0} y = z_0 - l + \frac{p_{am}}{\gamma} - \frac{\beta L}{g} l'',$$

имея в виду, что $p_0 = p_{am} + \gamma z_0$, найдем

$$y + \frac{p_0 F_к}{\gamma W_0} y = -l - \frac{\beta L}{g} l''.$$

Последнее можно преобразовать, учитывая, что

$$y = \frac{l\omega}{F_к}.$$

При этом получим:

$$\frac{\beta L}{g} l'' + l\left(1 + \frac{\omega}{F_к} + \frac{p_0 \omega}{\gamma W_0}\right) = 0.$$

Примем длину жидкого столба $L = \text{const}$, что вполне допустимо для длинного столба, и обозначим

$$\frac{g}{\beta L}\left(1 + \frac{\omega}{F_к} + \frac{p_0 \omega}{\gamma W_0}\right) = k^2,$$

тогда

$$l'' + k^2 l = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение гармонического колебательного движения.

Интеграл этого уравнения

$$l = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt),$$

где t — время;

k — частота колебаний

Постоянные интегрирования определим по начальным данным при $t = 0$; $l = l_0$, откуда $C_1 = l_0$ при $t = 0$, $l' = 0$, откуда $C_2 = 0$, тогда

$$l = l_0 \cos(kt).$$

Таким образом, при сделанных допущениях столб жидкости в трубопроводе будет совершать гармоническое колебательное движение с частотой k и с амплитудой l_0, равной начальному смещению столба жидкости.

Задача 10-3. Определить предельное число двойных ходов поршневого насоса (фиг. 10.12), перекачивающего бензин, согласно следующим данным:

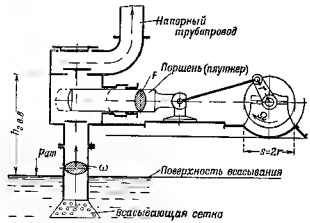
объемный вес бензина $\gamma = 750$ кГ/м³,

давление парообразования $p_П = 1\,925$ кГ/м²,

геометрическая высота всасывания $h_{с.в.в} = 5$ м,

сопротивление всасывающего клапана его открытию $h_{к.в} = 2$ м;

длина и диаметр всасывающего трубопровода $l = 10$ м; $d = 0{,}1$ м. Радиус кривошипа $r = 0{,}1$ м. Диаметр поршня $D = 0{,}15$ м.



Фиг. 10-12. Схема поршневого насоса. К задаче 10-3.

Решение. Для определения предельного числа двойных ходов поршневого насоса необходимо определить сначала давление на поршень по ходу всасывания. Затем определить давление, которое соответствует моменту начала всасывания, и приравнять это давление давлению парообразования $p_П$.

Для определения давления на поршень по ходу всасывания воспользуемся уравнением (10-22), принимая $\beta = 1$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}\, dl + h_n.$$

Инерционный напор учитываем только во всасывающем трубопроводе, длина которого l, и не учитываем в насосной камере.

$z_2 - z_1 = h_{с.в.в}$ — геометрическая высота всасывания;

$p_1 = p_{am}$ — давление на свободной поверхности всасывания;

$v_2 = p_{по\ ходу\ вс}$ — давление жидкости на поршень по ходу всасывания;

$v_1 = 0$ — скорость на свободной поверхности всасывания;

$v = \frac{F v_n}{\omega}$ — скорость жидкости во всасывающем трубопроводе согласно уравнению неразрывности, считая что жидкость не отрывается от поршня;

$v_2 = v_n - r\Omega \sin \Omega t$ — скорость поршня при „бесконечно длинном" шатуне;

$\Omega = \frac{\pi n}{30}$ 1/сек. — угловая скорость кривошипа;

F — площадь поршня;

ω — площадь сечения всасывающего трубопровода;

$$\frac{1}{g}\int_0^l \frac{dv}{dt}\,dl = \frac{1}{g\omega}\int_0^l \frac{dv_n}{dt}\,dl = \frac{1}{g}\frac{F}{\omega}\frac{dv_n}{dt}\int_0^l dl = \frac{Fl}{g\omega}\frac{dv_n}{dt},$$

$\frac{dv_n}{dt} = r\Omega^2 \cos \Omega t$ — ускорение поршня, соответствующее „бесконечно длинному" шатуну.

Подставляя значения, найдем

$$\frac{p_{\text{по ходу всас}}}{\gamma} - \frac{p_{\text{ат}}}{\gamma} = h_{\text{г в в}} - \frac{2v_n^2}{2g} - h_n - \frac{1}{g}\frac{Flr}{\omega}\Omega^2 \cos \Omega t$$

Наименьшее давление соответствует началу хода всасывания ($\cos \Omega t = 1$ и $v_n = 0$). Поэтому

$$\frac{p_{\text{по ходу всас мин}}}{\gamma} = \frac{p_{\text{ат}}}{\gamma} - h_{\text{г в в}} - h_n - \frac{1}{g}\frac{Flr}{\omega}\Omega^2.$$

В последнем выражении из потерь удельной энергии остается лишь потеря, связанная с преодолением сопротивления клапана его открытию ($h_n - h_{\text{кл}}$). Все остальные члены, определяющие потери, как зависящие от скорости (так как скорость в начале всасывания равна нулю), равны нулю.

Приравнивая $p_{\text{по ходу всас мин}}$ давлению парообразования $p_{\text{п}}$, найдем

$$\Omega^2 = \left(\frac{\pi n_{\text{пред}}}{30}\right)^2 = \frac{\frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{п}}}{\gamma} - h_{\text{г в в}} - h_{\text{кл}}}{\frac{Flr}{g\omega}},$$

откуда для метровых размеров

$$n_{\text{пред}} = 30\sqrt{\frac{\frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{п}}}{\gamma} - h_{\text{г в в}} - h_{\text{кл}}}{\frac{Flr}{\omega}}} \text{ об/мин.}$$

Глава одиннадцатая

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

11-1. Гидравлическое моделирование

Моделированием называется исследование явлений на моделях. Сущность моделирования заключается в том, что на модели меньшего, а иногда и большего масштаба создается гидравлическое явление, подобное явлению, которое имеет место или должно возникнуть в натуре, что и позволяет изучить это явление. Основной задачей теории моделирования является выявление

условий, обеспечивающих подобие явлений. Явления называются подобными, если по известным характеристикам одного явления можно получить простым пересчетом аналогичные характеристики другого явления.

Одним из существеннейших достоинств метода моделирования является возможность обобщения результатов единичного опыта на целый класс явлений. Этот метод, например, позволит результаты исследований движения воды обобщить на случай движения воздуха, масла и т. п., или наоборот. Даже больше, он позволяет распространить результаты исследования явления одного класса на явления другого класса, но описываемые одинаковыми математическими уравнениями. Метод моделирования обеспечивает наиболее рациональную организацию исследования, значительно сокращая тем самым объем экспериментальных работ, а значит и затраты средств, особенно, если исследования происходят на моделях меньших натуры.

Научной базой метода моделирования является теория подобия, переплетающаяся с методами теории размерностей.

11-2. Основные законы подобия. Критерий подобия Ньютона

Одним из важнейших условий, которым должны удовлетворять подобные явления, является так называемое геометрическое подобие.

Явления будут геометрически подобны, если существует геометрическое подобие размеров потока натуры и модели. Под этим понимают подобие размеров каналов, в которых протекает поток натуры и модели, подобие шероховатостей стенок, ограничивающих поток, в открытых потоках подобие свободных поверхностей, подобие запорных приспособлений, подобие твердых тел, помещаемых в натуре и в модели.

Если обозначить какие-либо характерные величины, например длину l, диаметр d, некоторую площадь ω или некоторый объем W, относящиеся к натуре, индексом $н$, а к модели индексом $м$, то между одноименными величинами геометрически подобных систем будет существовать соотношение

$$\lambda = \frac{l_н}{l_м} = \frac{d_н}{d_м} = \frac{\sqrt{\omega_н}}{\sqrt{\omega_м}} = \frac{\sqrt[3]{W_н}}{\sqrt[3]{W_м}}. \qquad (11\text{-}1)$$

Постоянная λ называется константой геометрического подобия.

В требования, предъявляемые к условиям геометрического подобия, должно быть включено взаимное и однозначное соответствие между частицами потока натуры и модели, заключающееся, в том, что каждой частице потока натуры должна соответствовать частица потока модели, и наоборот

Однако одного геометрического подобия еще недостаточно, чтобы явление было подобно. Известно, что в геометрически подобных каналах движение может быть различным. В подобных явлениях должно существовать и определенное соотношение между скоростями и ускорениями в соответственных точках, выражающееся условиями так называемого кинематического подобия.

Кинематическое подобие требует, чтобы траектории, описываемые соответствующими частицами потока натуры и модели, за любые соответствующие отрезки времени были подобны с константой подобия λ. Это значит, что зависимость между уравнениями траекторий соответствующих частиц должна определяться равенствами:

$$x_н = \lambda x_м; \quad y_н = \lambda y_м; \quad z_н = \lambda z_м,$$

в которых координаты являются функциями времени.

Примем также при этом, что если соответствующие участки траекторий $l_н$ и $l_м$ или $dl_н$ и $dl_м$ соответствующие частицы проходят за время $t_н$ и $t_м$ или $dt_н$ и $dt_м$, то отношение

$$\frac{t_н}{t_м} = \frac{dt_н}{dt_м} = \tau \tag{11-2}$$

должно быть независимым от времени и одним и тем же для любых соответствующих частиц.

Из условий кинематического подобия следует, что отношения соответствующих участков траекторий $l_н$ и $l_м$ или $dl_н$ и $dl_м$, или радиусов кривизны траекторий $r_н$ и $r_м$, если траектории криволинейны, также находятся между собой в отношении λ, т. е.

$$\frac{l_н}{l_м} = \frac{dl_н}{dl_м} = \frac{r_н}{r_м} = \lambda.$$

Из тех же условий кинематического подобия вытекает зависимость между скоростями в соответствующих точках $u_н$ и $u_м$, а именно

$$\frac{u_н}{u_м} = \frac{\frac{dl_н}{dt_н}}{\frac{dl_м}{dt_м}} = \frac{\lambda}{\tau}. \tag{11-3}$$

Такая же зависимость должна существовать и между максимальными скоростями $u_{макс}$ или средними скоростями v потока натуры и модели, т. е. должно быть:

$$\frac{u_н}{u_м} = \frac{u_{макс_н}}{u_{макс_м}} = \frac{v_н}{v_м}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\frac{u_н}{v_н} = \frac{u_м}{v_м}.$$

Отношение $\frac{u}{v}$ можно рассматривать как безразмерную относительную скорость, т. е. как значение скорости, выраженное в системе, в которой за единицу скорости принята средняя скорость v.

Таким образом, кинематическое подобие потока требует, чтобы поля безразмерных скоростей натуры и модели были бы тождественны. Впрочем это требование распространяется и на все другие одноименные величины.

Из условий кинематического и геометрического подобия вытекает зависимость между ускорениями $a_н$ и $a_м$ или между проекциями ускорений (например, между проекциями на нормаль, т. е. между нормальными ускорениями $\frac{u^2}{r}$, если траектории криволинейны), а именно

$$\frac{a_н}{a_м} = \frac{\left(\frac{u^2}{r}\right)_н}{\left(\frac{u^2}{r}\right)_м} = \frac{\lambda}{\tau^2}. \tag{11-4}$$

Материальное подобие требует взаимного соответствия между материальными частицами потока натуры и модели, при этом массы соответственных частиц $M = \rho W$, где ρ — плотность, а W — объем, также должны находиться в одном и том же отношении

$$\frac{M_н}{M_м} = \frac{\rho_н W_н}{\rho_м W_м} = P\lambda^3 = m, \tag{11-5}$$

где $P = \frac{\rho_н}{\rho_м}$ — отношение плотностей, а m — константа подобия масс.

Силовое подобие требует, чтобы равнодействующие силы $F = Ma$ сил, действующих на соответствующие материальные частицы потока натуры и модели в соответствующие моменты времени, также находились бы в отношении

$$\frac{F_н}{F_м} = \frac{M_н a_н}{M_м a_м} = m\lambda\tau^{-2} = \varphi, \tag{11-6}$$

где φ — константа динамического или силового подобия[1].

[1] Отношение (11-6) не теряет своего значения для подобных явлений и при переходе к предельному случаю, когда равнодействующие силы обращаются в нуль.

Из последнего следует равенство

$$\frac{F_н l_н}{M_н u_н^2} = \frac{F_м l_м}{M_м u_м^2} = Ne. \qquad (11\text{-}7)$$

Величина $\frac{Fl}{Mu^2} = Ne$ называется критерием механического подобия — критерием Ньютона. Из полученного следует, что для любых двух соответственных точек подобных потоков натуры и модели значения критерия механического подобия — числа Ньютона — имеют одно и то же значение, т. е.

$$Ne_н = Ne_м.$$

11-3. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера

Критерий Ньютона Ne выражает зависимость между силами, массами, скоростями и линейными размерами в динамически подобных потоках в общем виде. В гидравлике приходится иметь дело главным образом с тремя видами сил: силой веса, силой давления и силой трения. В некоторых случаях приходится принимать во внимание силы поверхностного натяжения. При этом чаще всего в различных явлениях главную роль играет только один из этих видов сил. В общем случае полного подобия необходимо иметь подобие всех сил. Однако каждый из этих видов сил требует своих условий подобия, причем иногда эти условия оказываются несовместимыми. Один такой пример будет приведен ниже. Таким образом, удовлетворить основному условию подобия — равенству критериев Ньютона — не всегда возможно. В таких случаях необходимо обеспечить подобие того вида сил, который оказывается наиболее существенным в изучаемом явлении.

Например, при исследовании законов гидравлических сопротивлений трубопроводов главную роль играют силы трения. При исследовании протекания жидкости через водосливы главную роль играют силы тяжести. Таких примеров можно было бы привести много. Критерии частичного подобия можно получить из критерия Ньютона, подставляя в него вместо силы F или силу трения $T = \omega \frac{du}{dn}$, при этом получим условие подобия только сил трения (критерий Рейнольдса Re), или силу тяжести $G = Mg$ — получим условие подобия только сил тяжести (критерий Фруда Fr), или силу давления $P = p\omega$ — условие подобия только сил давления (критерий Эйлера Eu) и т. п.

Подставив в (11-7) силу трения T, получим:

$$\frac{\mu_н \omega_н \frac{du_н}{dn_н} l_н}{M_н u_н^2} = \frac{\mu_м \omega_м \frac{du_м}{dn_м} l_м}{M_м u_м^2}.$$

Имея в виду, что $M = \rho \cdot W$, а в подобных системах

$$\frac{\omega_н l_н}{W_н} = \frac{\omega_м l_м}{W_м}$$

$$\frac{\frac{du_н}{dn_н} u_н}{\frac{du_м}{dn_м} u_м} = \frac{1}{\lambda},$$

будем иметь:

$$\frac{\mu_н u_н l_н}{\rho_н} = \frac{\mu_м u_м l_м}{\rho_м},$$

где $Re = \frac{\rho u l}{\mu}$ — критерий (число) Рейнольдса.

Таким образом, подобие сил трения в потоках, удовлетворяющих условиям геометрического, кинематического и материального подобия, будет только в том случае, если для каждой пары соответственных точек потока натуры и модели число Рейнольдса будет иметь одно и то же значение. В числе Рейнольдса за величину u может быть принята средняя скорость потока v, а за l — любая характерная линейная величина. Например, при изучении законов движения жидкости в трубах принимается диаметр трубы d или гидравлический радиус R. При этом число Рейнольдса будет представлено в виде:

$$Re_d = \frac{vd}{\mu}, \quad Re_R = \frac{vR}{\mu} \qquad (11\text{-}8)$$

Следует иметь в виду, что для подобия двух явлений существенно не численное значение критерия, а лишь его равенство для потоков натуры и модели.

Подставив в (11-7) силу тяжести $G = Mg$, получим:

$$\frac{g_н M_н l_н}{M_н u_н^2} = \frac{g_м M_м l_м}{M_м u_м^2}$$

или после сокращения

$$\frac{u_н^2}{g_н l_н} = \frac{u_м^2}{g_м l_м},$$

где $Fr = \frac{u^2}{gl}$ — критерий (число) Фруда. Иногда число Фруда Fr выражают через среднюю скорость

$$Fr = \frac{v^2}{gl} \qquad (11\text{-}9)$$

Равенство чисел Фруда Fr в соответственных точках потоков, удовлетворяющих геометрическому, кинематическому и материальному подобию, обеспечивает полобие сил тяжести. За величину l может быть принята любая характерная линейная величина. Например, при изучении волнового сопротивления, которое испытывает движущийся корабль, за l принимается длина корабля.

Подставим в (11-7) силу давления $P = p\omega$. Получим

$$\frac{p_н \omega_н l_н}{M_н u_н^2} = \frac{p_м \omega_м l_м}{M_м u_м^2},$$

имея в виду, что $M = \rho W$ и, кроме того, в геометрически подобных системах $\frac{\omega_н l_н}{W_н} = \frac{\omega_м l_м}{W_м}$, найдем

$$\frac{p_н}{\rho_н u_н^2} = \frac{p_м}{\rho_м u_м^2},$$

где $\frac{p}{\rho u^2} = Eu$ — критерий (число) Эйлера.

Числу Эйлера придают несколько иной вид, вводя вместо абсолютного давления p разность давления δp, а именно

$$Eu = \frac{\delta p}{\rho u^2}. \qquad (11\text{-}10)$$

Число Эйлера играет большую роль в исследовании явлений, связанных с кавитацией. В этом случае за δp принимается $\delta p = p - p_п$, где $p_п$ — давление парообразования.

Число

$$k = 2Eu$$

называется числом кавитации. Таким образом, равенство чисел Эйлера обеспечивает в динамически подобных потоках подобие сил давления.

В некоторых гидравлических исследованиях существенное значение имеет поверхностное натяжение. Для получения соответствующих условий подобия можно также исходить из критерия (11-7), подставляя в него значение силы поверхностного натяжения $F = \sigma l$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Преобразования, не отличающиеся от предыдущих, позволяют получить число Вебера — критерий подобия сил поверхностного натяжения в виде:

$$We = \frac{\sigma}{\rho u^2 l},$$

где l — характерная линейная величина.

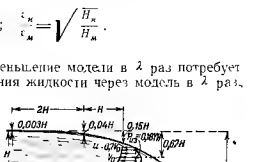
Выше мы уже отмечали, что полное подобие осуществить не всегда возможно. Покажем, что этого нельзя сделать во всех случаях, если для модели и для натуры применяется одна и та же жидкость. Рассмотрим один такой пример. Испытывается модель плотины при протекании через нее воды (фиг. 11-1). Примем за характерный линейный размер напор над гребнем плотины H. В этом случае числа Рейнольдса и Фруда представятся в следующем виде:

$$Re = \frac{v_н \nu_н H_н}{\mu_н} = \frac{v_м \nu_м H_м}{\mu_м}; \quad Fr = \frac{v_н^2}{g_н H_н} = \frac{v_м^2}{g_м H_м}.$$

Имея в виду, что в натуре и на модели жидкость одна и та же, у которой ρ, μ имеют одно и то же значение, получим следующие несовместимые равенства:

$$\frac{v_н}{v_м} = \frac{H_м}{H_н}; \quad \frac{\nu_н}{\nu_м} = \sqrt{\frac{H_н}{H_м}}.$$

По первому равенству уменьшение модели в λ раз потребует *увеличение* скорости протекания жидкости через модель в λ раз, а по второму равенству — *уменьшение* скорости протекания в $\sqrt{\lambda}$ раз. Ввиду того, что существенное значение при моделировании водослива играют силы тяжести, очевидно, режим работы модели необходимо подчинить тяжести. Если бы можно было изменять вязкость жидкости на модели, то при известных условиях можно было бы обеспечить условия подобия и сил тяжести и сил трения.



Фиг. 11. Схема водослива с тонкой стенкой.

Заметим, что весьма часто не удается осуществить полное подобие и вследствие трудностей создания подобия шероховатостей поверхностей.

В результате тех или других пренебрежений, допускаемых при моделировании, возникают погрешности при переносе на натуру результатов, полученных при исследовании модели, характеризующиеся так называемым масштабным эффектом.

11-4. Применение методов теории размерности к исследованию гидравлических закономерностей

При различных гидравлических исследованиях приходится устанавливать функциональные зависимости между физическими величинами, оказывающими влияние на исследуемые явления. Например, при изучении законов гидравлического сопротивления жидкости при движении ее по трубопроводу разыскивается зависимость падения давления δp от скорости движущейся жидкости v, плотности ρ, вязкости ν, длины l, диаметра d и высоты выступов шероховатости Δ стенок трубопровода, а именно

$$\delta p = f(v, \rho, \nu, d, l, \Delta).$$

При изучении движения жидкости через плотину (водослив) разыскивается зависимость расхода G [$кГ/сек$] в виде функции

$$G = f(\rho, g, b, H),$$

где H — напор над гребнем водослива,
b — ширина водослива.

Можно было бы привести множество аналогичных примеров. Во всех них исследуемая величина (обозначим ее через N) чаще всего размерная, выражается через другие физические величины, которые будем обозначать через n_i. В общем виде функциональная зависимость N может быть представлена в виде:

$$N = f(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k). \qquad (11\text{-}11)$$

где n_i — все различные физические и геометрические величины, являющиеся характерными для данного исследования.

В общем случае в функциональную зависимость, включая и величину N, входят $k+1$ величин. Некоторые из $k+1$ величин N и n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ могут быть переменными, другие постоянными; некоторые могут быть размерными, другие отвлеченными. Но при всех условиях функциональная зависимость N должна быть независимой от выбора системы единиц измерения, так как эта зависимость выражает физический закон. От выбора системы единиц измерения будет зависеть лишь численное значение величин N или n_i. Таким образом, в выборе единиц измерения может быть допущено отступление от общепринятых единиц. Необходимо только, чтобы единицы измерения были по своим размерностям независимыми, т. е. чтобы размерности любой из них нельзя было получить из комбинации размерностей других величин и их число должно позволить выразить через них размерности всех других величин, входящих в функциональную зависимость N. При гидравлических исследованиях оказывается

целесообразным за основные единицы измерения принять следующие три величины, имеющие независимые размерности:

1. Скорость u какой-либо частицы потока или среднюю скорость потока в каком-либо сечении v.

2. Какую либо характерную длину, например диаметр трубопровода d, длину трубопровода l или длину корабля. С таким же успехом можно было бы принять $\sqrt{\omega}$, где ω — характерная площадь. Можно было бы также принять вместо l за основную единицу не длину, а площадь ω.

3. Плотность жидкости ρ.

Размерность этих основных единиц измерения в технической системе $[v] = м/сек$; $[l] = м$; $[\rho] = кГ\,сек^2/м^4$.

Через основные величины можно выразить размерность любой величины, входящей в функциональные зависимости, исследуемые в большинстве случаев в гидравлике. При подобном выборе единиц измерения размерности всех остальных $(k+1-3)$ различных величин N и n_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k-3)$, входящих в функциональную зависимость, могут быть выражены в виде произведения некоторых степеней основных единиц, а именно:

$$[N] = [v]^x \cdot [l]^y \cdot [\rho]^z, \quad [n_i] = [v]^{x_i} \cdot [l]^{y_i} \cdot [\rho]^{z_i}.$$

Численное значение величин N и n_i в системе единиц (например, в системе метр, секунда, килограмм-сила) может быть найдено как произведение некоторого отвлеченного числа π или π_i на произведение степеней единиц основной системы, а именно.

$$N = \pi v^x l^y \rho^z, \quad n_i = \pi_i v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}.$$

Значение отвлеченных чисел π и π_i можно вычислить по формулам

$$\pi = \frac{N}{v^x l^y \rho^z}; \quad \pi_i = \frac{n_i}{v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}}. \qquad (11\text{-}12)$$

Так как величины v, l и ρ приняты за основные, то отвлеченные величины π и π_i можно рассматривать как безразмерное (относительное) значение N и n_i. Из этого следует, что относительное значение каждой из величин, входящих в функциональную зависимость, оказывается уменьшенным в $v^x l^y \rho^z$ или $v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}$ раз. Вследствие этого функциональная зависимость (11-11) может быть представлена в виде

$$\frac{N}{v^x l^y \rho^z} = f\left(\frac{n_1}{v^{x_1} l^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{n_2}{v^{x_2} l^{y_2} \rho^{z_2}}, \ldots, \frac{n_k}{v^{x_k} l^{y_k} \rho^{z_k}}\right). \qquad (11\text{-}13)$$

Будем считать, что n_k, n_{k-1} и n_{k-2} соответственно равны v, l и ρ. В этом случае последние три члена функциональной зависимости обращаются в единицы и функциональная зависимость может быть представлена в виде.

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{k-3}, 1, 1, 1). \qquad (11\text{-}14)$$

Таким образом, в общем случае функциональная зависимость между $[k+1]$ размерными величинами N и n_i может быть представлена как соотношение между $(k+1-3)$ величинами π и $\pi_i (i = 1, 2, 3, \ldots, k-3)$, каждая из которых есть безразмерная степенная комбинация величин, входящих в функциональную зависимость. Эта теорема называется π теоремой. Можно показать, что если в функциональную зависимость входят коэффициент вязкости μ, поверхностного натяжения σ, ускорение силы тяжести g или давление δp, то соответствующие им величины π_i обратны или совпадают с критериями подобия Рейнольдса, Вебера, Фруда и Эйлера

Равенство безразмерных величин π_i в подобных потоках выражает равенство относительных значений соответствующих физических величин, почему эти величины могут рассматриваться как критерии подобия.

11-5. Гидравлические сопротивления. Принцип наложения потерь энергии

Исследование гидравлических сопротивлений возможно лишь в установившемся движении. Для неустановившегося движения не существует способов их определения, и поэтому в гидравлике принято результаты исследований сопротивлений установившегося движения переносить и на неустановившееся движение.

Определение потерь энергии является одним из важнейших вопросов почти любого гидравлического расчета. В гидравлических расчетах приходится иметь дело с двумя видами потерь: с потерями энергии по длине трубопроводов и с потерями в местных сопротивлениях. К потерям энергии по длине трубопроводов относятся потери энергии на прямолинейных участках трубопроводов, а к потерям энергии в местных сопротивлениях — потери на таких участках трубопроводов, где имеет место нарушение нормальной конфигурации потока. При этом за нормальную конфигурацию потока принимается конфигурация потока на прямолинейном участке трубопровода на расстояниях, достаточно удаленных от входа. Таким образом, всевозможные входы в трубопровод, расширения и сужения трубопроводов, вентили, клапаны и т. п. представляют собой так называемые местные сопротивления.

Особенность явлений, возникающих в местных сопротивлениях, заключается в том, что при протекании жидкости через них всегда появляются так называемые поверхности раздела, являющиеся границами масс жидкости, участвующих в различных движениях. Например, при протекании через внезапное расширение (фиг. 15-6) такими поверхностями являются $b - m$ и $c - n$. Поверхности раздела весьма неустойчивы. Частицы жидкости, образующие эти поверхности, быстро свертываются в вихри. Вследствие вязкости и деформации движение этих вихрей затухает, а их энергия преобразуется необратимым образом в тепловую. Эта часть энергии и рассматривается как потери, обусловленные местными гидравлическими сопротивлениями

Заметим, что в общем случае трубопровод представляет совокупность большого числа разнообразных гидравлических сопротивлений. Сам трубопровод может состоять из участков с различными диаметрами. На нем смонтированы различные запорные устройства, фильтры, расходомеры и т. п. При определении общей потери удельной энергии, что необходимо при гидравлических расчетах, исходят из так называемого принципа наложения потерь. Сущность этого принципа заключается в том, что полная потеря удельной энергии слагается из арифметической суммы потерь, вызванных каждым сопротивлением в отдельности. Конечно, подобный способ определения потерь в отдельных случаях будет грешить некоторой неточностью, ввиду того, что каждое сопротивление, создавая соответствующее возмущение в потоке на смежных к нему участках, тем самым изменяет нормальное сопротивление этих участков. Особенно это относится к потерям энергии в местных сопротивлениях, если они расположены вблизи друг от друга.

Прежде чем описать экспериментальные приемы исследования гидравлических сопротивлений, покажем, каким образом можно использовать теоретические предпосылки для установления вида интересующих нас функциональных зависимостей.

Применим π-теорему для выявления функциональной зависимости для закона потерь удельной энергии на участке цилиндрической трубы длиной l и диаметром d

Экспериментальные исследования этого вопроса, включающие производственный опыт, показывают, что потери удельной энергии в данном частном случае характеризуются только падением давления δp по длине трубопровода (см. фиг. 10-9), зависят от средней скорости движения v, диаметра трубы d, ее длины l, шероховатости Δ, вязкости жидкости μ и плотности ρ.

Таким образом, в общем виде функциональная зависимость для δp может быть представлена в виде

$$\delta p = f(\mu, l, \Delta, \rho, v, d). \qquad (11\text{-}15)$$

Примем за независимые единицы измерения ρ, v и d. В этом случае функциональную зависимость можно представить согласно (11-13) в виде:

$$\frac{\delta p}{v^x d^y \rho^z} = f\left(\frac{\mu}{v^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1}},\ \frac{l}{v^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2}},\ \frac{\Delta}{v^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3}},\ 1,\ 1,\ 1\right),$$

или согласно (11-14) в виде:

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, 1, 1, 1),$$

где

$$\delta p_{кГ\ м^2} = \pi (v_{м\ сек})^x (d_м)^y (\rho_{кГ\ сек^2\ м^4})^z,$$

$$\mu_{кГ\ сек\ м^2} = \pi_1 (v_{м\ сек})^{x_1} (d_м)^{y_1} (\rho_{кГ\ сек^2\ м^4})^{z_1};$$

$$l_м = \pi_2 (v_{м\ сек})^{x_2} (d_м)^{y_2} (\rho_{кГ\ сек^2\ м^4})^{z_2},$$

$$\Delta_м = \pi_3 (v_{м\ сек})^{x_3} (d_м)^{y_3} (\rho_{кГ\ сек^2/м^4})^{z_3}.$$

Показатели степени при v, d и ρ определим сравнением размерностей левой и правой частей формул для δp, μ, l и Δ, а именно: показатели степени при $кГ$

$$1 = z;\ 1 = z_1;\ 0 = z_2;\ 0 = z_3;$$

показатели степени при $м$

$$-2 = x + y - 4z;\ -2 = x_1 + y_1 - 4z_1;\ +1 = x_2 + y_2 - 4z_2,$$
$$1 = x_3 + y_3 - 4z_3;$$

показатели степени при секундах

$$0 = -x + 2z;\ 1 = -x_1 + 2z_1;\ 0 = -x_2 + 2z_2,\ 0 = -x_3 + 2z_3.$$

Решая полученные системы уравнений, находим:

$$x = 2,\quad y = 0,\quad z = 1;$$
$$x_1 = 1,\quad y_1 = 1,\quad z_1 = 1;$$
$$x_2 = 0,\quad y_2 = 1,\quad z_2 = 0;$$
$$x_3 = 0,\quad y_3 = 1,\quad z_3 = 0.$$

Подставляя найденные значения показателей степени в функциональную зависимость, можем представить ее в виде:

$$\frac{\delta p}{\rho v^2} = f\left(\frac{\mu}{v d \rho},\ \frac{l}{d},\ \frac{\Delta}{d}\right).$$

Экспериментальное исследование показывает, что полученное выражение можно представить в виде:

$$\frac{\delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d} f\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right).$$

Обозначим функцию f через $\lambda/2$ (заметим, что это ничего общего не имеет с константой геометрического подобия)

$$\lambda = 2f\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right) \tag{11-16}$$

и через

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d}. \tag{11-17}$$

При этом получим:

$$\frac{\delta p}{\rho \frac{v^2}{2}} = \lambda \frac{l}{d} = \zeta,$$

где λ — коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода,

ζ — коэффициент потерь удельной энергии по длине.

При этом формулу для определения потерь удельной энергии $h_п = \frac{\delta p}{\gamma}$ можно представить в виде (формула Дарси):

$$h_п = \frac{\delta p}{\gamma} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}. \tag{11-18}$$

Из формул (11-16) и (11-17) следует важный результат, а именно, что в динамически подобных потоках безразмерное падение давления $\left(\frac{\delta p}{\rho \frac{v^2}{2}}\right)$ или коэффициент λ имеют одно и то же значение независимо от рода жидкости.

Это значит, что при необходимости получить значение коэффициента λ, например для масла или воздуха для некоторого значения Re, можно эксперимент производить, например, с водой, но при том же Re. Необходимо лишь, чтобы при этом были соблюдены и другие законы моделирования.

Заметим, что приведенные выше соображения можно распространить и на местные сопротивления.

В этом случае изменится вид функциональной зависимости (11-16), в которую в зависимости от типа местного сопротивления войдут некоторые дополнительные безразмерные отношения, характеризующие форму местного сопротивления.

Формула для определения потерь удельной энергии и в этом случае могла бы быть представлена в виде:

$$h_м = \zeta_м \frac{v^2}{2g}, \tag{11-19}$$

где под $\zeta_м$ надо было бы понимать коэффициент потерь удельной энергии в местном сопротивлении, сокращенно коэффициент местного сопротивления, в отличие от предыдущего случая, где

он был назван коэффициентом потерь удельной энергии по длине. Изложенное выше подтверждается многочисленными опытами.

Подробное обоснование формул для коэффициентов λ и ζ при различных режимах движения будет приведено в соответствующих разделах курса.

Для опытного определения потерь энергии в установившемся движении в трубе может быть использована установка, изображенная на фиг. 11-2. Здесь *1* — исследуемая труба; *2* — пьезометры; *3* — ртутный дифференциальный манометр, включенный параллельно пьезометрам; *4* — мерный бак; *5* — ртутный дифференциальный манометр, присоединенный к водомеру, устанавливаемому при отсутствии мерного бака.

Исходной формулой для определения потерь является уравнение (10-23):

$$h_n = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right). \qquad (11\text{-}20)$$

Если трубопровод между сечениями *1* и *2* состоит из труб разного диаметра и на нем смонтированы различные местные сопротивления, потери удельной энергии h_n на основании принципа наложения потерь могут быть представлены формулой

$$h_n = \Sigma\lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma\zeta \frac{v^2}{2g},$$

для трубопровода одного сечения — формулой

$$h_n = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \Sigma\zeta \frac{v^2}{2g},$$

для трубопровода без местных сопротивлений — формулой

$$h_n = h_\partial = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

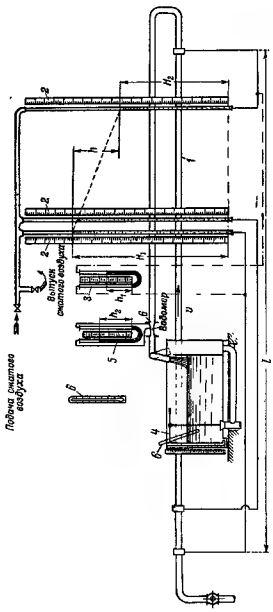
где h_∂ означает потери только по длине трубопровода.

Посредством пьезометров можно вычислить значения

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = h.$$

При больших значениях h применяется ртутный дифференциальный манометр. В этом случае

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = h_1 \frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}.$$



Фиг. 11-2. Схема экспериментальной установки для исследования коэффициента λ.

1 — опытная трубопровод; *2* — пьезометры; *3* — ртутный дифференциальный манометр; *4* — мерный бак; *5* — ртутный дифференциальный манометр водомера; *6* — термометры.

Посредством мерного бака можно определить соответствующую скорость по формуле

$$v = \frac{W}{t\omega},$$

где W — объем жидкости, протекший по трубе за время опыта t;

ω — соответствующая площадь живого сечения потока

Если определяются потери энергии в трубе постоянного сечения, причем на участках, на которых равны не только v, но и α, значит и $\alpha_1 v_1^2 = \alpha_2 v_2^2$, то в этом случае расчетной формулой для горизонтальной трубы является:

$$h_д = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H_1 - H_2.$$

Глава двенадцатая

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Общие характеристики ламинарного движения были рассмотрены в § 7-1. Там же было приведено критическое значение числа Re

$$Re_{кр} = 2\,320,$$

которое считается границей перехода одного режима движения в другой. Однако напомним еще раз, что в инженерной практике, особенно в коротких трубопроводах, не всегда удается сохранить ламинарное движение даже при значительно меньших значениях Re. Наличие различных устройств в трубопроводных коммуникациях уменьшает значение критического числа. Это всегда следует иметь в виду, и поэтому в расчетах со значениями Re, лежащими вблизи принятого критического значения $Re_{кр} = 2\,320$, надо тщательно анализировать все условия, могущие оказать влияние на режим движения.

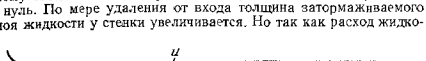
12-1. Формирование изотермического ламинарного потока

Изучение скоростей отдельных частиц жидкости по длине потока показывает, что на участке вблизи входа в трубопровод частицы движутся неравномерно, а именно: частицы, расположенные вблизи оси потока, движутся ускоренно, частицы, находящиеся ближе к стенке, замедленно. Благодаря этому эпюра скоростей для разных сечений (фиг. 12-1) этого участка трубопровода не будет одинаковой.

По длине этого участка происходит формирование потока. Длина входного участка, на котором заканчивается формирование потока, называется длиной начального участка. За начальным участком движение становится равномерным.

Рассмотрим формирование ламинарного потока в трубопроводе, вход в который сделан плавным (фиг. 12-1)

Жидкость вступает в трубу с почти одинаковой скоростью по всему сечению и только у стенок скорость жидкости обращается в нуль. По мере удаления от входа толщина заторможиваемого слоя жидкости у стенки увеличивается. Но так как расход жидкости остается одним и тем же, то замедление движения слоев, расположенных ближе к стенкам, вызывает увеличение скорости слоев, расположенных ближе к оси трубы.



Фиг. 12-1. Схема распределения скоростей на начальном участке установившегося ламинарного потока.

Сформировавшемуся, а значит равномерному изотермическому ламинарному потоку жидкости в круглой трубе соответствует параболический закон распределения скоростей В этом потоке осевая скорость, являющаяся максимальной $u_{макс}$, в 2 раза больше средней

$$u_{макс} = 2v.$$

Такое распределение скоростей наступает лишь на расстоянии от входа в трубу, равном бесконечности. Но практически уже на конечных расстояниях от входа в трубу распределение скоростей мало отличается от параболического.

Теоретическое определение длины начального участка было произведено французским ученым Буссинеском еще в 1891 г.

Он считал, что формирование потока практически можно считать законченным, если скорость частицы в конце участка на оси u_{oc} достигает 0,99 значения максимальной скорости $u_{макс}$, соответствующей равномерному ламинарному потоку в круглой трубе:

$$u_{oc} = 0{,}99\, u_{макс}.$$

При этих условиях им была получена для длины начального участка $l_н$ формула

$$l_н = 0{,}065 dRe. \qquad (12\text{-}1)$$

В технической литературе весьма широкое распространение получила упрощенная теория начального участка, разработанная немецким ученым Шиллером, согласно которой

$$l_н = 0{,}02875 dRe. \tag{12-2}$$

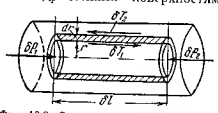
Отметим, что это значение длины начального участка соответствует по вычислениям автора в конце его скорости на оси потока u_{oc}, составляющей всего лишь 0,89 от $u_{макс} = 2v$.

Устройство остроконечного входа ухудшает условия формирования потока. Струя жидкости, вынужденная принять при входе форму, показанную на фиг. 15-14, при последующем расширении способствует уменьшению устойчивости ламинарного потока. В таких условиях длина начального участка будет значительно больше.

Некоторые другие данные, характеризующие начальный участок, будут изложены ниже.

12-2. Дифференциальное уравнение равномерного изотермического ламинарного осесимметричного движения в трубопроводах

В ламинарном равномерном потоке, ограниченном круглыми цилиндрическими поверхностями, выделим кольцевой цилиндрический слой жидкости (фиг. 12-2) с внутренним радиусом r, толщиной dr и длиной δl. Составим для него уравнения движения. Так как частицы рассматриваемого слоя движутся равномерно, то сумма проекций всех действующих на цилиндрический слой жидкости сил на ось должна равняться нулю. Выясним, какие силы будут проектироваться на ось движения, предполагая сначала, что ось движения горизонтальна. На внутреннюю цилиндрическую поверхность слоя будет действовать направленная в сторону движения сила трения



Фиг. 12-2. Схема поверхностных сил, действующих на кольцевую часть потока.

$$\delta T_1 = 2\pi r \delta l \tau.$$

На внешнюю цилиндрическую поверхность слоя будет действовать сила

$$\delta T_2 = \delta T_1 + \frac{\partial}{\partial r}(2\pi r \delta l \tau)\, dr = \delta T_1 + 2\pi \delta l \frac{\partial}{\partial r}(r\tau)\, dr$$

Сила δT_2 направлена в сторону, обратную движению.

На торцевые поверхности цилиндрического слоя будет действовать слева сила давления

$$\delta P_1 = 2\pi r dr p_1,$$

а справа — сила давления

$$\delta P_2 = 2\pi r dr \left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial l}\delta l\right).$$

Составим уравнение проекций:

$$\delta T_1 - \delta T_2 + \delta P_1 - \delta P_2 = 0.$$

После подстановки найденных значений будем иметь:

$$-2\pi \delta l \frac{\partial}{\partial r}(r\tau)\, dr - 2\pi r dr \frac{\partial p}{\partial l}\delta l = 0,$$

откуда

$$-\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\tau) = 0. \tag{12-3}$$

Поскольку в рассматриваемом случае согласно уравнению (10-27)

$$-\frac{\partial p}{\partial l} = \gamma J,$$

а согласно уравнению (2-19)

$$\tau = -\mu\frac{du}{dr},$$

уравнение примет вид:

$$\gamma J + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \tag{12-4}$$

или если μ по сечению постоянно, т. е. от r не зависит, то

$$\gamma J + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

Так как $u = u(r)$, т. е. является функцией только от r, то частные производные можно заменить на полные и уравнение переписать в виде:

$$\gamma J + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0 \tag{12-5}$$

Легко показать, что полученное уравнение (12-5) справедливо также для ламинарного изотермического равномерного и прямолинейного потока в трубопроводе, ограниченном поверхностями цилиндров, расположенными под любым углом к горизонту [в этом случае гидравлический уклон надо определить по формуле (10-28)], что следует также и из формулы (8-39).

12-3. Равномерное изотермическое ламинарное движение в круглом трубопроводе

Закон распределения скоростей в равномерном изотермическом ламинарном потоке по сечению круглой трубы может быть найден в результате интегрирования уравнения (12-5) умножением его предварительно на dr.

В изотермическом потоке гидравлический уклон J является и по сечению и по длине постоянной величиной, поэтому после интегрирования получим.

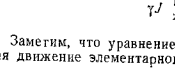
$$\gamma J \cdot \frac{r}{2} + \mu \frac{du}{dr} = C,$$

причем C – постоянная интегрирования.

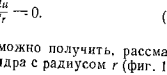
Считая распределение скоростей симметричным относительно оси, мы можем положить при $r=0$ $\frac{du}{dr}=0$. При этом окажется, что $C=0$ и поэтому

$$\gamma J \frac{r}{2} + \mu \frac{du}{dr} = 0. \qquad (12\text{-}6)$$

Заметим, что уравнение (12-6) можно получить, рассматривая движение элементарного цилиндра с радиусом r (фиг. 12-3).



Фиг. 12-3. Схема поверхностных сил, действующих на цилиндрическую часть потока.



Фиг. 12-4 Схема распределения напряжений сил трения в цилиндрической трубе.

Имея в виду, что $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$, можно на основании формулы (12-6) установить, что в рассматриваемом движении напряжение сил трения τ изменяется по живому сечению по линейному закону (фиг. 12 4) от нуля на оси до $\tau_0 = \gamma J \frac{r_0}{2}$ на стенке:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}. \qquad (12\text{-}7)$$

Интегрируя уравнение (12 6) и принимая на стенке при $r=r_0$ скорость равной нулю, получим:

$$\int_0^u du = -\frac{\gamma J}{2\mu} \int_{r_0}^{r} r dr,$$

откуда

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2 - r^2). \qquad (12\text{-}8)$$

Из формулы (12-8) следует, что при равномерном изотермическом движении в круглой трубе, в поперечном сечении скорости распределяются по параболическому закону (фиг. 2-4.)

Максимальная скорость будет на оси потока (при $r=0$)

$$u_{макс} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_0^2. \qquad (12\ 9)$$

Ламинарное движение является вихревым. Для доказательства этого вычислим величину угловой скорости Ω, воспользовавшись формулами (7-15) и (12-8) и имея в виду, что $r^2 = y^2 + z^2$. Из этих формул следует, что

$$\Omega_x = 0,$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{du_x}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{du_x}{dr} \cdot \frac{dr}{dz} = -\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{2rz}{2r} = -\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot z;$$

$$\Omega_z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{du_x}{dy} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{du_x}{dr} \cdot \frac{dr}{dy} = +\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{2ry}{2r} = +\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot y;$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r. \qquad (12\text{-}10)$$

Максимальную угловую скорость имеют частицы, расположенные на стенках трубы, для которых $r = r_0$.

$$\Omega_{макс} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_0$$

Для частиц, расположенных на оси, $r=0$, поэтому и $\Omega = 0$.

Возникновение вихрей обусловливается вязкостью жидкости и может быть объяснено следующим образом. У твердой стенки скорость жидкости равна нулю. Стенка затормаживает движение. Поэтому соприкасающиеся со стенкой частицы жидкости не могут по ней скользить и вынуждены по ней как бы перекатываться, приобретая при этом вращательное движение. Аналогичное вращение возникает в соприкасающихся слоях, движущихся с различными скоростями захватывая всю внутреннюю область потока.

Заметим, что, кроме вращательного движения, каждая частица в ламинарном потоке совершает поступательное и деформационное движение.

Для вычисления расхода рассмотрим слой, заключенный между двумя концентрическими окружностями радиуса r и $r+dr$ (фиг. 12-2) Площадь поперечного сечения этого слоя

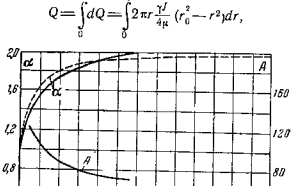
$$d\omega = 2\pi r dr.$$

Элементарный объемный расход, соответствующий этому слою, можно найти по формуле

$$dQ = u d\omega = \frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2 - r^2)\cdot 2\pi r dr.$$

Для вычисления полного расхода надо просуммировать элементарные расходы, т. е. проинтегрировать предыдущее выражение в пределах от $r=0$ до $r=r_0$. При этом получим:

$$Q = \int_0^{r_0} dQ = \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2 - r^2) dr,$$



Фиг. 12-5. Зависимость коэффициентов α и A для ламинарного потока от $x/d\cdot Re$. Пунктирная линия соответствует теории Буссинеска.

откуда и получаем формулу Пуазейля

$$Q = \frac{\pi \gamma J r_0^4}{8\mu} = \frac{\pi \gamma J d^4}{128\mu}. \qquad (12\text{-}11)$$

Величину средней скорости найдем по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\gamma J r_0^2}{8\mu} = \frac{\gamma J d^2}{32\mu}. \qquad (12\text{-}12)$$

Из сопоставления формул (12-9) и (12-12) найдем, что средняя скорость

$$v = \frac{1}{2} u_{макс}. \qquad (12\text{-}13)$$

Пользуясь формулой (12-8), можно определить коэффициент кинетической энергии α и коэффициент количества движения β для равномерного ламинарного потока

$$\alpha = \frac{\int_\omega u^3 d\omega}{v^3\omega} = 2; \qquad (12\text{-}14)$$

$$\beta = \frac{\int_\omega u^2 d\omega}{v^2\omega} = 1{,}33. \qquad (12\text{-}15)$$

По длине начального участка при закругленном входе значение коэффициента α изменяется от 1 до 2 и для различных сечений начального участка, находящегося на расстоянии x от закругленного входа, по исследованиям автора в соответствии с теорией Буссинеска и Шиллера имеет значение согласно фиг 12-5. На том же участке значения β изменяются от 1 до 1,33.

Энергия, теряемая при равномерном изотермическом ламинарном движении в круглом трубопроводе, может быть вычислена при помощи формул (12-11) и (12 12), согласно которым гидравлический уклон

$$J = \frac{32\mu v}{\gamma d^2} = \frac{128\mu Q}{\pi \gamma d^4}. \qquad (12\text{-}16)$$

Потеря удельной энергии на длине l

$$h_п = h_д = Jl,$$

т. е.

$$h_д = \frac{32\mu v l}{\gamma d^2} = \frac{128\mu Q l}{\pi \gamma d^4}. \qquad (12\text{-}17)$$

Последнее выражение можно преобразовать, для этого μ выразим через число Рейнольдса:

$$\mu = \frac{v d \rho}{Re}.$$

Получим:

$$h_д = \frac{64}{Re}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}. \qquad (12\text{-}18)$$

Обозначим через λ

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \qquad (12\text{-}19)$$

тогда будем иметь

$$h_д = \lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}. \qquad (12\text{-}20)$$

Экспериментальные исследования равномерного ламинарного движения показывают, что при движении жидкости в практических условиях по металлическим, как правило, шероховатым трубопроводам наблюдается некоторое отклонение коэффициента λ от теоретического значения по формуле (12-19). Так, напри-

мер, автором в 1946 г. были исследованы стальные трубопроводы диаметром 27, 41, 75 и 106 *мм* и получены значения λ, приведенные в табл. 12-1.

Таблица 12-1

Значения коэффициента λ в ламинарном движении в металлических трубопроводах и гибких армированных шлангах

Диаметр, *мм*	25	27	41	50	75	106
$\lambda_{труб}$	—	$\frac{64}{Re}$	$\frac{70,8}{Re}$	—	$\frac{70}{Re}$	$\frac{70,3}{Re}$
$\lambda_{шл}$	$\frac{67}{Re}$	—	—	$\frac{76,5}{Re}$	$\frac{83,5}{Re}$	—

Еще бо́льшие отклонения были получены при исследовании специальных типов шлангов, армированных внутри проволочной спиралью (см. фиг. 14-12).

Формула (12-17) показывает, что в ламинарном движении потери удельной энергии пропорциональны расходу Q в первой степени и обратно пропорциональны диаметру d в четвертой степени. При заданном расходе и трубопроводах потери будут тем меньше, чем меньше вязкость жидкостей, т. е. чем выше их температура. Поэтому сильно вязкие жидкости, перекачиваемые в условиях ламинарного движения, обычно подогревают. Однако при этом надо иметь в виду, что температура подогрева не должна превосходить значений, при которых происходят разрушение ламинарного потока и превращение его в турбулентный, что обусловливает возрастание потерь и соответственно мощности, необходимой для перекачки.

Заметим, что формулы (12-18) и (12-19) не пригодны для начального участка. Для определения коэффициентов λ в начальном участке на основании исследований автора при $l_н = 0,0287dRe$ следует пользоваться формулой

$$\lambda = \frac{A}{Re}, \tag{12-21}$$

где значения A приведены на фиг 12-5.

В том случае, если длина участка l больше длины начального участка $l_н$, потеря энергии будет складываться из потери на начальном участке и из потери на сформировавшемся участке и определится по формуле

$$h_д = \left[\frac{A}{Re}\frac{l_н}{d} + \frac{64}{Re}\left(\frac{l}{d} - \frac{l_н}{d}\right)\right]\frac{v^2}{2g},$$

или после преобразования

$$h_д = \left[\frac{(A-64)}{Re}\frac{l_н}{d} + \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Принимая во внимание, что для полной длины начального участка $A = 69,56$, а $\frac{l}{dRe} = 0,028,5$, получим:

$$h_д = \left(0,16 + \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}. \tag{12-22}$$

Задача 12-1. Определить теряемую мощность при перекачке по трубопроводу длиной $l = 5$ *км* и диаметром $d = 0,3$ *м* мазута в количестве $G = 242$ *т/час* при температуре $t_1 = 40°$ С (вязкость $\nu = 1,5$ *см²/сек*) и при температуре $t_2 = 10°$ С (вязкость $\nu = 25$ *см²/сек*), объемный вес $\gamma = 950$ *кГ/м³* (принимаем постоянным).

Решение. Сначала определим режим движения

$$Re_1 = \frac{Q}{0,785D\nu_1} = \frac{0,0707\cdot 10^4}{0,785\cdot 0,3\cdot 1,5} = 2\,000,$$

где

$$Q = \frac{G}{\gamma 3\,600} = \frac{242\,000}{950\cdot 3\,600} = 0,0707 \ м^3/сек.$$

$$Re_2 = \frac{0,0707\cdot 10^4}{0,785\cdot 0,3\cdot 25} = 120.$$

В обоих случаях движение ламинарное. Мощность в киловаттах вычислим по формуле

$$N = \gamma Q h_д : 102,$$

или

$$N_1 = \frac{128\cdot\rho\nu l Q^2}{102\cdot\pi d^4} = \frac{128\cdot 97\cdot 1,5\cdot 10^{-4}\cdot 5\,000\cdot 0,0707^2}{102\cdot 3,14\cdot 0,0081} = 7,5 \ квт,$$

где

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{950}{9,81} = 97 \ кГ\cdot сек^2/м^4.$$

$$N_2 = \frac{128\cdot 97\cdot 25\cdot 10^{-4}\cdot 5\,000\cdot 0,0707^2}{102\cdot 3,14\cdot 0,0081} = 292 \ квт$$

Таким образом, подогрев мазута с 10 до 40° С в рассматриваемом случае дает уменьшение мощности, необходимой для перекачки, на 94%.

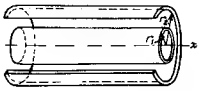
12-4. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости между соосными цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости в пространстве между двумя соосно расположенными цилиндрами. В этом случае поперечное сечение потока (фиг 12 6) ограничено двумя концентрическими окружностями[1]

Для получения формул распределения скоростей, расхода и потерь удельной энергии будем исходить из дифференциального уравнения (12 5)

$$\gamma J + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

[1] Рассматриваемая схема применяется в случаях, когда жидкость, текущая в пространстве между трубами, должна подогреваться. Для подогреваемой жидкости укладывается вторая труба, в рассматриваемом случае меньшего диаметра.



Фиг. 12-6. Схема кольцевого трубопровода.

После интегрирования будем иметь:

$$-\frac{\gamma J}{2\mu}\cdot r^2 + C = r\frac{du}{dr};$$

разделив переменные, получим:

$$\left(-\frac{\gamma J}{2\mu}\cdot r + \frac{C}{r}\right)dr = du,$$

откуда после повторного интегрирования

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot r^2 + C\cdot\ln r + D.$$

Постоянные интегрирования C и D найдем, воспользовавшись граничными условиями, а именно: приняв, что на стенках труб скорости равны нулю, т. е. положив, что $u=0$ при $r=r_1$ и $r=r_2$.

Будем иметь:

$$C\cdot\ln r_1 + D = \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot r_1^2,$$

$$C\cdot\ln r_2 + D = \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot r_2^2.$$

Из этих уравнений следует:

$$C = \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot\frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$

$$D = \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot\frac{r_1^2\ln r_2 - r_2^2\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Таким образом, для скорости получим следующее выражение:

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu}\left(r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\ln r - \frac{r_1^2\ln r_2 - r_2^2\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right). \quad (12\text{-}23)$$

Этому выражению соответствуют кривые распределения скоростей, изображенные на фиг. 12-7 для различных значений r_2/r_1.

Расход Q вычислим по формуле

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r\,du = 2\pi\int_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot r^2 + C\cdot\ln r + D\right)r\,dr.$$

Имея в виду, что

$$\int^{r_2} r\cdot\ln r\cdot dr = \frac{r_2^2\ln r_2}{2} - \frac{r_1^2\ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4},$$

получим:

$$Q = 2\pi\left[-\frac{\gamma J}{16\mu}(r_2^4 - r_1^4) + \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot\frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4}\right) + \frac{\gamma J}{4\mu}\cdot\frac{r_1^2\ln r_2 - r_2^2\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}\right],$$

или после соответствующих алгебраических преобразований

$$Q = \frac{\pi\gamma J}{8\mu}\left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right]. \quad (12\text{-}24)$$

Среднюю скорость вычислим по формуле

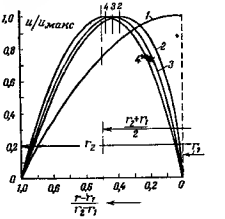
$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\gamma J}{8\mu}\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right). \quad (12\text{-}25)$$

Гидравлический уклон

$$J = \frac{8\mu v}{\gamma\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)}. \quad (12\text{-}26)$$

Потери энергии на длине l

$$h_0 = Jl = \frac{8\mu v l}{\gamma\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)}. \quad (12\text{-}27)$$



Фиг. 12-7. Кривые распределения скоростей в поперечных сечениях кольцевого трубопровода в ламинарном потоке.

$r_1=95$ мм; 1 — $r_1=0$, 2 — $r_1=5$ мм; 3 — $r_1=17{,}5$ мм и 4 — $r_1=50$ мм.

Введем в последнее уравнение число Рейнольдса

$$Re = \frac{4RR_0}{\mu} = \frac{2v(r_2 - r_1)\rho}{\mu},$$

где $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2 + r_1)} = \frac{r_2 - r_1}{2}$ — гидравлический радиус [1].

В результате получим

$$h_\sigma = \frac{32}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2 - r_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

или, вводя вместо r_1 и r_2 диаметры труб d_1 и d_2, получим:

$$h_\sigma = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{\ln \frac{d_1}{d_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{2{,}3 \lg \frac{d_1}{d_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (12\text{-}28)$$

Если назвать приведенным диаметром d_0 выражение

$$d_0 = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{2{,}3 \lg \frac{d_1}{d_2}}, \quad (12\text{-}29)$$

то потери энергии можно определять по формуле

$$h_\sigma = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d_0} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (12\text{-}30)$$

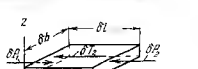
12-5. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости в плоской щели

Рассмотрим равномерное движение слоя, являющегося частью потока жидкости, показанного на фиг. 12-8 и имеющего форму, изображенную на фиг. 12-9. Для некоторой определенности будем считать, что слой находится в верхней половине щели. Составим уравнение движения этого слоя, допуская, что в плоскостях, параллельных плоскости x, z, скорости распределяются одинаково [2]. Так как частицы рассматриваемого слоя движутся равномерно, то сумма проекций всех действующих на него сил на любую ось должна равняться нулю.

[1] Здесь $\omega = \pi(r_2^2 - r^2)$ — площадь живого сечения, $\chi = 2\pi(r_2 + r_1)$ — смоченный параметр.

[2] Такое допущение справедливо только для щели, бесконечно широкой по сравнению с ее толщиной.

Фиг. 12-8. Распределение скоростей в плоской щели ламинарного потока.



Фиг. 12-9. Схема сил, действующих на плоский элемент жидкости в ламинарном потоке.

Выясним, какие силы будут проектироваться на ось движения, предполагая, что ось движения горизонтальна. Это будут следующие силы

$$\delta T_1 = \tau \delta b \delta l;$$

$$\delta T_2 = \delta T_1 + \frac{\partial \tau}{\partial z} \delta z \delta b \delta l;$$

$$\delta P_1 - \delta P_2 = -\frac{\partial p}{\partial l} \delta l \delta b \delta z.$$

Сумма проекций этих сил на ось движения должна равняться нулю, а именно:

$$-\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial l} = 0,$$

или в связи с формулой (2-19)

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (12\text{-}31)$$

Так как τ и u являются функциями только z, а $\frac{\partial p}{\partial l} = -\gamma J$, последнее уравнение можно представить в виде:

$$\gamma J = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Интегрируя уравнение (12-31) дважды, получим:

$$u = -\frac{\gamma J}{2\mu} z^2 + Cz + D.$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что на стенках (фиг. 12-8) при $z = 0$ и $z = h$, $u = 0$, откуда $D = 0$,

$$C = \frac{\gamma J h}{2\mu}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{\gamma J}{2\mu} \cdot z(h - z). \quad (12\text{-}32)$$

Из этого уравнения видно, что скорости распределяются по параболе (фиг. 12-8).

Расход

$$Q = \int_0^h ubdz = \frac{\gamma Jb}{2\mu} \cdot \int_0^h z(h-z)\,dz = \frac{\gamma Jb}{12\mu} \cdot h^3. \qquad (12\text{-}33)$$

Среднюю скорость найдем по формул

$$v = \frac{Q}{bh} = \frac{\gamma Jh^2}{12\mu}. \qquad (12\text{-}34)$$

Гидравлический уклон равен:

$$J = \frac{12\mu v}{\gamma h^2}. \qquad (12\text{-}35)$$

Потери удельной энергии вычислим по формуле

$$h_\sigma = Jl = \frac{12\mu v l}{\gamma h^2}, \qquad (12\text{-}36)$$

где l — длина щели (в направлении оси x).

Весьма часто формулами (12-33)—(12-36) пользуются и для расчета кольцевых щелей, что, однако, не всегда допустимо.

Если канал конечной ширины, расчетными формулами являются следующие (в этом случае уже нельзя считать распределение скоростей в плоскостях, параллельных плоскости x, z, одинаковым):

$$Q = \frac{\gamma Jbh^3}{12\mu}\left(1 - 0{,}62\frac{h}{b}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\cdot \mathrm{th}\,\frac{\pi nb}{2h}\right); \qquad (12\text{-}37)$$

$$v = \frac{\gamma J}{12\mu}h^2\left(1 - 0{,}62\frac{h}{b}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\cdot \mathrm{th}\,\frac{\pi nb}{2h}\right); \qquad (12\text{-}38)$$

$$h_\sigma = \frac{12\mu v l}{\gamma h^2}\cdot\left(1 - 0{,}62\cdot\frac{h}{b}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\cdot \mathrm{th}\,\frac{\pi nb}{2h}\right) \qquad (12\text{-}39)$$

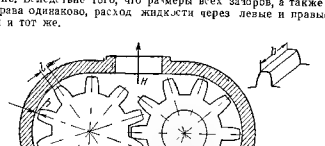
При малом значении второго члена в скобках формулы (12-37)—(12-39) обращаются в (12-33), (12-34), (12-36).

В формулах (12-37)—(12-39) th означает гиперболический тангенс. Во многих случаях достаточно ограничиться только значением $n = 1$.

Задача 12-2. В шестеренчатом насосе (фиг. 12-10) благодаря разности давлений, создающихся в нагнетательной полости ($н$) и во всасывающей полости ($в$), часть жидкости через радиальные зазоры (h) перетекает из нагнетательной полости обратно во всасывающую. Требуется определить количество перетекаемой жидкости (утечки) согласно следующим данным: 1) каждый из зазоров представляет узкую щель, высота которой $h = 0{,}009$ *см*, длина щели $l = 0{,}2$ *см*, а ширина $b = 2{,}9$ *см*; 2) общий перепад давления

$\delta p = 4$ *кГ/см²*. Через зазоры протекает масло, вязкость которого при температуре $t = 17°$ С, $\mu = 6{,}83$ *г/см·сек*. Задачу решить, не принимая во внимание вращения шестерен.

Решение. Вследствие того, что размеры всех зазоров, а также их число слева и справа одинаково, расход жидкости через левые и правые зазоры будет один и тот же.



Фиг. 12-10. Схема шестеренчатого насоса. К задаче 12-2.

В этих условиях перепад давления, приходящийся на один зазор, равен $\delta p_1 = \frac{\delta p}{n}$, где $n = 5$ число зазоров с каждой стороны. Расход жидкости через зазор можно определить по формуле (12-33), принимая $\gamma J = \frac{\delta p}{nl}$,

$$Q = \frac{\delta p}{n}\cdot\frac{bh^3}{12\mu l} = \frac{4\cdot 9{,}81\cdot 10^5}{5}\cdot\frac{2{,}9\cdot 0{,}009^3}{12\cdot 6{,}83\cdot 0{,}2} = 0{,}1\ \frac{см^3}{сек}.$$

Число $9{,}81\cdot 10^5$ введено в результате изменения размерности динамического коэффициента вязкости. Общий расход $Q_0 = 2Q = 0{,}2$ *см³/сек*.

Предлагается доказать самостоятельно, что при неравных по толщине зазорах или при неодинаковом их числе, расчетной формулой будет служить:

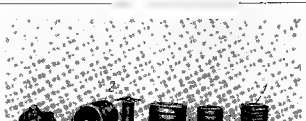
$$Q_0 = \frac{\delta p\, b}{12\mu l}\cdot\frac{1}{\left[\frac{1}{h_1^3}+\frac{1}{h_2^3}+\frac{1}{h_3^3}+\frac{1}{h_4^3}+\frac{1}{h_5^3}\right]+\left[\frac{1}{h_5^3}+\frac{1}{h_7^3}+\frac{1}{h_8^3}+\frac{1}{h_9^3}+\frac{1}{h_{10}^3}\right]}.$$

Заметим, что в шестеренчатом насосе перетекание жидкости (утечки) происходит также и через зазоры между торцами шестерен и корпусом (через торцевые зазоры).

12-6. Плоский радиальный ламинарный поток

Рассматриваемый в этом параграфе плоский радиальный поток представляет упрощенную модель потока, образующегося при фильтрации. Фильтрацией называется движение жидкости через некоторую пористую среду. Основные уравнения теории фильтрации были получены Н. Е. Жуковским в 1889 г.

Радиальный поток возникает, в частности, при фильтрации топлива через войлочные фильтры, устанавливаемые весьма ча-



Фиг. 12-11. Фильтр тонкой очистки.
1—фильтрующие секции, 2—корпус, 3—металлическая сетка.

сто в системе питания двигателей внутреннего сгорания. Один из таких фильтров в собранном и разобранном виде показан на фиг. 12-11.

Фиг. 12-12. Распределение давления и скорости по толщине фильтрующей секции.

В отличие от фильтрационного движения грунтовых вод, которое может совершаться и под действием силы тяжести, движение жидкости через рассматриваемый фильтр происходит благодаря разности давлений по обе стороны от фильтра. В условиях протекания жидкости через фильтр возможна как ламинарная, так и турбулентная фильтрация. В условиях ламинарной фильтрации пьезометрический уклон пропорционален расходу в первой степени. В условиях турбулентной фильтрации пьезометрический уклон пропорционален расходу в степени $\varepsilon > 1$.

Рассмотрим лишь ламинарную фильтрацию (фиг. 12-12) через фильтр с кольцевым сечением. Экспериментальные исследования ламинарной фильтрации позволяют выразить зависимость между пьезометрическим уклоном и расходом в виде:

$$Q = kSJ_n, \tag{12-40}$$

или в виде

$$\gamma Q = kS \cdot \frac{dp}{dr}, \tag{12-41}$$

где k — коэффициент фильтрации, *м/сек*;
$S = 2\pi rh$ — площадь поперечного сечения фильтрационного потока, *м*²;
h — высота фильтра, *м*;
$\frac{dp}{dr}$ — градиент давления.

Для получения расчетной зависимости представим уравнение (12-40) в виде:

$$dp = \frac{\gamma Q}{k \cdot 2\pi h} \cdot \frac{dr}{r},$$

откуда после интегрирования

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma Q}{k \cdot 2\pi h} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1},$$

или

$$p_2 - p_1 = \frac{2{,}3\gamma Q}{2\pi kh} \lg \frac{r_2}{r_1}. \tag{12-42}$$

Весовой расход G вычислим по формуле

$$G = \gamma Q = \frac{2{,}73kh}{\lg \frac{r_2}{r_1}} \cdot (p_2 - p_1). \tag{12-43}$$

На фиг. 12-13 изображены результаты исследований автором гидравлического сопротивления войлочного фильтра с секциями различных форм, показанных на фиг. 12-11. Исследованию подвергались фильтры разных размеров и разных сортов[1]. Из рассмотрения этого графика следует, что перепад давления в пределах опыта пропорционален расходу жидкости в первой степени, что подтверждает справедливость формулы (12-43), а значит и исходной формулы (12-40). Формула (12-42) может быть использована для исследования закона изменения давления в фильтре. Для этого ее надо представить в виде.

$$p - p_1 = \frac{2{,}3\gamma Q}{2\pi kh} \lg \frac{r}{r_1}, \tag{12-44}$$

где r — текущий радиус.

Имея в виду, что согласно формуле (12-43)

$$k = \frac{\gamma Q \cdot \lg \frac{r_2}{r_1}}{2{,}73 \cdot h(p_2 - p_1)},$$

получим:

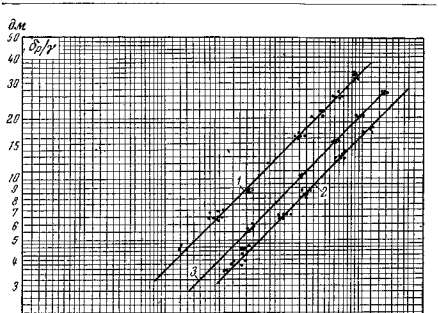
$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{\lg \frac{r_2}{r_1}} \cdot \lg \frac{r}{r_1}. \tag{12-45}$$

Из формулы (12-45) следует, что в направлении течения давление падает или перепад давлений растет по логарифмическому закону (фиг. 12-12).[2]

---

[1] В исследованиях принимал участие П. С. Мучников.

[2] При расчете фильтров, внешний контур которых представляет собой квадрат (см. фиг. 12-11), в соответствующие формулы следует подставить значение эквивалентного радиуса, равного $r_{2э} = \frac{2b}{\pi}$, где b — сторона квадрата.



Фиг. 12-13. Зависимость перепада давления от расхода при фильтрации газойля ($\nu = 0{,}068$ *см²/сек*; $\gamma = 0{,}851$ *Г/см³*; $t = 20°C$).

1—круглые фильтрующие секции $d_1/d_2 = 122/38$, *2* круглые фильтрующие секции $d_1/d_2 = 85/38$, *3*—квадратные секции $b/d_2 = 85/38$.

Из уравнения неразрывности $Q = \text{idem}$ следует, что скорость фильтрации $v_ф$, равная отношению расхода Q к общей площади кругового сечения фильтра $S = 2\pi rh$, т. е.

$$v_ф = \frac{Q}{2\pi rh}, \tag{12-46}$$

изменяется в радиальном направлении (фиг. 12-12) по гиперболическому закону

$$v_ф \cdot r = \text{idem} \tag{12-47}$$

Значения коэффициента фильтрации зависят от материала фильтрующего элемента, степени его загрязнения, рода фильтрующей жидкости и ее температуры. Для однородной фильтрационной среды коэффициент фильтрации может быть выражен через ко-

эффициент вязкости жидкости и так называемый коэффициент проницаемости, характеризующий фильтрационную среду

$$k = k_{пр} \frac{\gamma}{\mu}, \tag{12-48}$$

где γ — объемный вес жидкости, *кГ/м³*;
μ — динамический коэффициент вязкости, *кГ·сек/м²*;
$k_{пр}$ — коэффициент проницаемости, *м²*.

Существенное влияние на коэффициент проницаемости оказывает пористость фильтрационной среды, которая характеризуется так называемым коэффициентом порозности

$$k_{пор} = \frac{W_п}{W}, \tag{12-49}$$

где $W_п$ — объем пор;
W — общий объем пористой среды.

Чем меньше $k_{пор}$, тем плотнее материал фильтра, тем большее сопротивление он оказывает фильтрации жидкости.

В табл. 12-2 приведены значения коэффициента фильтрации для войлочного фильтра, результаты испытания которого изображены на фиг. 12-13. Для сопоставления в той же таблице приведены средние значения коэффициента фильтрации для некоторых других сред.

Таблица 12-2

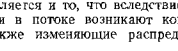
Значения коэффициентов порозности и фильтрации

Фильтрующий материал	Коэффициент порозности, %	Коэффициент фильтрации, *см/сек*
Гравий ($2 \leqslant d \leqslant 20$ *мм*)	30—40	—
Пески ($0{,}06 \leqslant d \leqslant 2$ *мм*)	30—45	$(1-6)\cdot 10^{-3}$ до $(1-6)\cdot 10^{-2}$
Супесь	35—45	$(1-6)\cdot 10^{-3}$ до $(1-6)\cdot 10^{-4}$
Суглинок	35—50	$(1-6)\cdot 10^{-5}$
Глинистый грунт	40—55	$(1-6)\cdot 10^{-6}$
Торфяной грунт	60—80	—
Войлок	86,5	0,00267 до 0,00384

12-7. Неизотермическое ламинарное движение в круглой трубе

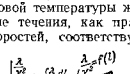
В неизотермическом потоке температура может изменяться и по живому сечению потока и по длине. Существенной величиной, влияющей на распределение скоростей и давлений в ламинарном потоке, является коэффициент вязкости жидкости μ; непостоянство его в неизотермическом потоке является причиной нарушения законов распределения скоростей и давлений, свойственных изотермическому потоку.

Если, например, в изотермическом потоке в круглой трубе скорости распределяются по параболическому закону (фиг. 2-4), то в потоке неизотермическом, например в теплообменном аппарате, распределение скоростей будет подчиняться другому закону (фиг. 12-14). Важной особенностью неизотермического потока является и то, что вследствие неодинаковой температуры жидкости в потоке возникают конвекционные течения, как правило, также изменяющие распределение скоростей, соответствующее



Фиг. 12-14. Схема распределения скоростей в изотермическом и неизотермических ламинарных потоках.

1—изотермический поток, *2* неизотермический поток (нагревание); *3* неизотермический поток (охлаждение).



Фиг. 12-15. Схема зависимости λ/γ^2 от l по длине ламинарного неизотермического потока, охлаждающегося в направлении движения.

изотермическому потоку. Это особенно проявляется в трубопроводах, расположенных вертикально. В общем случае конвекционные течения могут явиться причиной нарушения равномерности движения потока и даже его ламинарности.

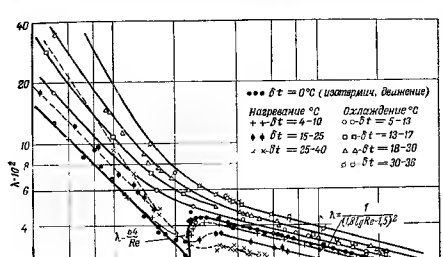
Неизотермический ламинарный поток изучен недостаточно и в книге подробно не рассматривается. Ниже будет рассмотрен случай приближенного решения лишь одного частного случая, а именно определение потерь удельной энергии в потоке неизотермическом только по длине. Так как полная потеря удельной энергии на всей длине равна сумме потерь на элементарных участках, ее можно приближенно определить, рассматривая движение на каждом элементарном участке трубопровода как изотермическое, по формуле

$$h_g = \frac{G^2}{2g\omega^2 d}\int_0^l \frac{\lambda}{\gamma^2}\,dl, \qquad (12\text{-}50)$$

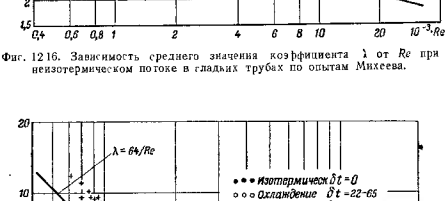
где G — весовой расход.

Для такого решения вопроса нужно знать закон распределения температуры вдоль трубопровода. Это позволит приближенно определить для каждого участка трубопровода коэффициент вязкости жидкости, объемный вес, число Re и коэффициент λ.

Интеграл $\int_0^l \frac{\lambda}{\gamma^2}\,dl$ можно также вычислить, если изобразить зависимость $\frac{\lambda}{\gamma^2}$ от l графически (фиг. 12-15). В этом случае он будет равен заштрихованной на фигуре площади. Для ко-



Фиг. 12-16. Зависимость среднего значения коэффициента λ от Re при неизотермическом потоке в гладких трубах по опытам Михеева.



Фиг. 12-17. Зависимость среднего значения коэффициента λ от Re при неизотермическом потоке в гладких трубах по опытам Михеева для воздуха.

ротких трубопроводов по данным М. А. Михеева расчет h_a в неизотермических потоках в круглой трубе можно производить, принимая среднее значение коэффициента λ по фиг. 12-16 и 12-17. Следует обратить внимание на то, что коэффициент λ имеет различное значение в зависимости от того, движется ли жидкость в сторону увеличения температуры или в сторону уменьшения. Число Re на фигурах соответствует средней температуре.

Глава тринадцатая

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

13-1. Виды трения

Гидродинамическая теория смазки занимается изучением гидравлических явлений, возникающих в смазочном слое при относительном движении двух твердых тел, разделенных этим слоем. Основоположником этой теории является выдающийся русский ученый Н. П. Петров.

Заслуга Н. П. Петрова заключается в том, что он впервые в мире, в 1883 году разработал теорию трения в хорошо смазанных подшипниках, исходя из положения, что трение в подшипниках подчиняется гидродинамическим законам. В обоснование своей теории Н. П. Петров проделал огромное количество экспериментальных исследований по изучению вязкостных свойств различных жидкостей. Дальнейшее развитие гидродинамической теории обязано трудам О. Рейнольдса, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, Л. С. Лейбензона и других. Представляют значительный интерес также работы немецких ученых А. Зоммерфельда, Гюмбеля и др.

Первая работа Н. Е. Жуковского «О гидродинамической теории трения хорошо смазанных тел» была опубликована в 1886 году. В 1904 году Н. Е. Жуковским совместно с С. А. Чаплыгиным было дано точное решение задачи о движении вязкой жидкости в двух измерениях между двумя эксцентричными окружностями. Эта работа послужила основой дальнейших работ в этой области. Следует указать, что до исследований Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина считалось, по утверждениям немецкого ученого А. Зоммерфельда, что точное решение этой задачи (подшипник бесконечной длины) невозможно.

Л. С. Лейбензоном была исследована кинематика потока в масляном слое, установлены «границы приложимости гидродинамической теории смазки».

В наше время гидродинамическая теория трения развивается применительно к работе подшипников конечной длины.

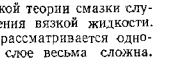
В развитии этой теории большую роль сыграли и советские ученые Н. И. Мерцалов, М. И. Яновский, Е. М. Гутьяр, А. К. Дьячков и другие.

Подробное изложение гидродинамической теории смазки выходит за рамки учебника по гидравлике.

В этой главе будут исследованы несколько частных вопросов этой теории: кинематика потока, способность жидкости в смазочном слое воспринимать большие усилия, не выжимаясь из зазора, понятие о коэффициенте трения и некоторые другие.

Теоретической основой гидродинамической теории смазки служат дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости.

При этом жидкость смазочного слоя рассматривается однородной, хотя ее структура в смазочном слое весьма сложна. В общем случае этот слой может быть представлен, как показано на фиг. 13-1. Непосредственно на поверхности твердых тел, например цапфы или вкладыша, образуется пленка *1* окислов металла или его неорганических соединений (сульфидов, хлоридов и т. п.) толщиной $\approx 10^{-4}$ *мм*. Такие пленки обладают слоистой структурой, легко сдвигаются друг относительно друга, тем самым уменьшая трение.



Фиг. 13-1. Структура смазочного слоя.

К пленке окислов или неорганических соединений примыкает так называемый граничный адсорбционный слой *2* смазочного вещества, удерживающийся возле поверхностей твердых тел под действием молекулярных сил, исходящих от этих тел. По своим механическим свойствам адсорбционный слой отличается от остальной жидкости смазочного слоя. Молекулы адсорбционного слоя располагаются около поверхности тел упорядоченными слоями. Иногда ближайшие к твердому телу молекулы адсорбционного слоя вступают с ним в химическую реакцию (хемосорбция). Граничный слой образуется вследствие содержания в смазочном веществе поверхностно активных молекул (так называемых присадок, добавляемых к маслам для улучшения их смазочных свойств), способных адсорбироваться на трущихся поверхностях (к числу присадок относится, например, олеиновая кислота). Остальная часть смазочного слоя *3* образована нормальной смазкой.

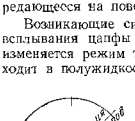
Рассмотрим явления, возникающие в смазочном слое подшипника. В состоянии покоя (фиг. 13-2) цапфа занимает самое нижнее положение. Она лежит на вкладыше подшипника, выдавливая под действием тяжести смазку в местах соприкосновения. Поверхности трения твердых тел в этом положении отделены друг от друга окисным и адсорбционным слоем, поэтому в момент трогания (начала вращения) начальная сила трения, имею-

щая максимальное значение, в основном зависит от состояния этих двух слоев. Такое трение называется граничным и всегда включает в себя элементы сухого трения, являясь по существу полусухим трением. При граничном трении, кроме вязкости жидкости, проявляют влияние еще и особые свойства адсорбционного слоя в совокупности с вязкостью, называемые маслянистостью. Благодаря трению повышается температура окисного и адсорбционного слоев, вследствие чего начальная сила трения уменьшается. Смазка, заполняющая внутреннюю полость подшипника, увлекается вращающейся цапфой. Цапфа нагнетает смазку в клинообразную полость, образованную поверхностями цапфы и вкладыша.

Фиг. 13-2 Положение цапфы в подшипнике в состоянии покоя

Вследствие этого в пространстве $Ц$ в жидкости создается повышенное давление, передающееся на поверхность цапфы.

Возникающие силы стремятся приподнять цапфу. По мере всплывания цапфы увеличивается толщина смазочного слоя, изменяется режим трения. Полусухое и граничное трение переходит в полужидкостное, характеризующееся тем, что наряду с влиянием на трение адсорбционного граничного слоя на него начинает оказывать более значительное влияние главным образом вязкость жидкости.



Фиг. 13-3. Положение цапфы в подшипнике при ее вращении при гидродинамическом трении и распределение гидродинамического давления по поверхности цапфы.

В дальнейшем при увеличении скорости цапфы и вследствие все большего нагревания смазочного слоя давление возрастает, и при некотором его значении, соответствующем динамическому равновесию системы, всплывание цапфы достигает максимального значения и она оказывается расположенной в подшипнике эксцентрично относительно его оси (фиг. 13-3). В этом состоянии на трение оказывает влияние только вязкость жидкости. Такое трение называется жидкостным. Исследованию этого состояния смазочного слоя будут посвящены следующие параграфы.

При всплывании цапфы ее центральная ось перемещается относительно оси подшипника в направлении вращения цапфы, т. е. при вращении цапфы, например, в направлении часовой стрелки (фиг. 13-3), в том же направлении относительно оси подшипника переместится и ось цапфы. Пространство между цапфой и вкладышем заполняется смазкой. Чем больше скорость вращения, тем

значительнее смещается цапфа. При угловой скорости вращения, равной бесконечности

$$\Omega = \infty,$$

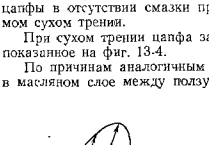
цапфа стремится занять в подшипнике центральное положение. Однако такое центральное положение теоретически возможно лишь, как показал в 1886 г. Н. Е. Жуковский[1], только при отсутствии нагрузки.

В положении, соответствующем определенной нагрузке на поверхности цапфы, действуют две системы сил: силы гидродинамического давления δP, направленные перпендикулярно к поверхности цапфы, и силы трения δT, направленные по касательной. Сила трения обусловливается вязкостью жидкости и определяется из соотношений, приведенных в § 9 1. Только этим отличаются силы жидкостного трения от сил трения, возникающих при вращении цапфы в отсутствии смазки при так называемом сухом трении.

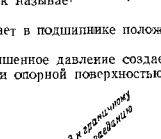
Фиг. 13-4. Положение цапфы в подшипнике при ее вращении и сухом трении.

При сухом трении цапфа занимает в подшипнике положение, показанное на фиг. 13-4.

По причинам аналогичным повышенное давление создается и в масляном слое между ползуном и опорной поверхностью



Фиг. 13-5. Распределение давления по опорной поверхности ползуна и кинематика потока в смазочном слое.



Фиг. 13-6. Зависимость коэффициента трения при различных режимах трения.

На фиг. 13-3 и 13-5 показано изменение гидродинамического давления в смазочном слое в подшипнике и под ползуном. Обра-

[1] Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, т IV, Главная редакция авиационной литературы, М. — Л., 1937, стр 234.

гим внимание на то, что на краях смазочного слоя давление равно давлению окружающей среды (весьма часто атмосферному) и достигает максимума где то внутри масляного слоя. Опыт подтверждает, что весьма тонкий слой смазки оказывается способным воспринимать значительные усилия, осуществляя тем самым наиболее благоприятные условия работы трущихся поверхностей в условиях жидкостного трения.

Важными величинами, характеризующими свойства смазочного слоя являются динамический коэффициент вязкости жидкости μ, нагрузка, характеризующаяся средним давлением p_{cp} в смазочном слое, а также величина угловой скорости Ω. Из этих величин можно образовать только один безразмерный комплекс

$$\frac{\Omega\mu}{p_{cp}}=S, \tag{13-1}$$

играющий роль критерия подобия в гидродинамической теории смазки.

На фиг. 13 6 показан характер зависимости коэффициента трения f (отношение нагрузки на смазочный слой к силе трения) от $\frac{\Omega\mu}{p_{cp}}=S$ при различных режимах трения.

13-2. Основные уравнения

В дальнейшем будем считать толщину смазочного слоя малой, хотя и значительно большей, чем шероховатость трущихся поверхностей. В рассматриваемых случаях трущиеся поверхности всегда будут разделены смазочным слоем. Ширину трущихся поверхностей будем считать достаточно большой (как говорят, равной бесконечности). В этом случае можно пренебречь утечками жидкости через торцевые зазоры ($u_y=0$), а поток рассматривать как плоский со скоростями u_x и u_z.

Пренебрегая влиянием веса жидкости, кривизной траектории и ускорением движения для приближенного исследования, достаточно будет воспользоваться дифференциальным уравнением движения (12-31), выведенными в § 12-5 для потока в плоской щели, обозначая $u_x=u$,

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{13-2}$$

В этом уравнении в отличие от равномерного движения

$$\frac{dp}{dx}\neq \text{const},$$

причем, по толщине смазочного слоя давление имеет одно и то же значение.

Исследование изменения скорости u_z не представляет интереса[1].

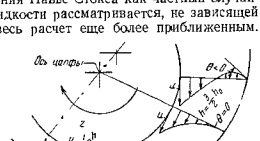
При сделанных оговорках это уравнение справедливо и для смазочного слоя подшипника и для слоя в ползуне. Оно могло быть получено и из уравнения Навье Стокса как частный случай. В дальнейшем вязкость жидкости рассматривается, не зависящей от давления, что делает весь расчет еще более приближенным.

Сперва изучим распределение скоростей по живым сечениям смазочного слоя. Для этого проинтегрируем уравнение (13-2) для большей определенности применительно к паре цапфа—подшипник (фиг. 13-7). Дважды интегрируя, получим:

$$\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{dp}{dx}\cdot z+C$$

и

$$\mu\cdot u=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{z^2}{2}+Cz+D.$$



Фиг. 13-7. Кинематика потока в смазочном слое подшипника.

Постоянные интегрирования определим из условия:

на внутренней поверхности вкладыша, т. е. при $z=0$ $u=0$, вследствие чего $D=0$;

на поверхности цапфы, т. е. при $z=h$ и $u=+U$, где U—окружная скорость цапфы,

$$C=\frac{U\mu}{h}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{h}{2}.$$

Поэтому

$$\mu\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{dp}{dx}\cdot\left(z-\frac{h}{2}\right)+\mu\frac{U}{h}; \tag{13-3}$$

$$\mu u=\mu U\cdot\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\cdot\frac{dp}{dx}z(h-z). \tag{13-4}$$

Для последующего определим расход Q, отнесенный к единице ширины подшипника $b=1$. Для этого вычислим интеграл

$$Q_{b=1}=\int_0^h u\,dz=U\frac{h}{2}-\frac{dp}{dx}\frac{h^3}{12\mu}. \tag{13-5}$$

[1] Между скоростями u_x и u_z существует зависимость, определяемая уравнением неразрывности (8-21) (при $u_y=0$).

На основании уравнения неразрывности расход через любое сечение имеет одно и то же значение. Вычислим его для сечения, в котором давление достигло экстремума $\left(\frac{\partial p}{\partial x}=0\right)$.

Обозначим толщину слоя в этом сечении через h_0 (в подшипнике таких сечений будет два: одно для $p_{макс}$, другое для $p_{мин}$).

Получим:

$$Q=\frac{Uh_0}{2}.$$

При этом для $\frac{\partial p}{\partial x}$ будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=6\mu U\frac{h-h_0}{h^3}. \qquad (13\text{-}6)$$

Уравнение (13-6) называется уравнением Рейнольдса и может быть использовано для приближенного исследования смазочного слоя как в подшипнике, так и в ползуне. Из полученного уравнения следует, что при постоянной толщине смазочного слоя давление p также оказывается постоянным и должно быть равно давлению на границах. В этом случае смазочный слой не может развить необходимых усилий для поддержания цапфы во взвешенном состоянии.

Для подшипника или ползуна конечной ширины уравнение Рейнольдса имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial x}. \qquad (13\text{-}7)$$

Для подшипника или ползуна бесконечной ширины $\frac{\partial p}{\partial y}=0$ и уравнение (13-7) обращается в уравнение (13-6).

Подставляя значение $\frac{\partial p}{\partial x}$ из (13-6) в (13-4), получим:

$$u=U\left[\frac{z}{h}-3\frac{h-h_0}{h^3}\left(hz-z^2\right)\right]. \qquad (13\text{-}8)$$

Исследуем уравнение (13-8). В сечении $h=h_0$, т. е. в сечении с экстремальным значением давления $\left(\frac{\partial p}{\partial x}=0\right)$, скорости изменяются по уравнению

$$u=U\cdot\frac{z}{h},$$

т. е. по прямолинейному закону.

Левее этого сечения $\frac{\partial p}{\partial x}<0$ (отрицательно) и поэтому профили скоростей изображаются параболами, вытягивающимися в сторону U, и, наоборот, правее этого сечения $\frac{\partial p}{\partial x}>0$ и профили скоростей изображаются параболами со скоростями, имеющими даже различное направление

Наибольший интерес представляет сечение, в котором касательная к эпюре скоростей в точке $z=0$ образует с радиусом цапфы угол $\theta=0$. До этого сечения, как показал Л. С. Лейбензон, смазочный слой не разрушается. Для этого сечения $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ и из уравнения (13-3) следует, что при этом

$$h_{z=1}=\frac{3}{2}h_0.$$

Это сечение определяет границу смазочного слоя. Справа от этого сечения возникают обратные течения, разрушающие смазочный слой. Аналогичная картина наблюдается и в смазочном слое ползуна (см. фиг. 13-5).

При исследовании смазочного слоя ползуна всей системы, включая и жидкость, сообщается движение со скоростью, противоположной скорости ползуна. На фиг. 13 5 показаны относительные скорости в потоке по отношению к ползуну.

13-3. Распределение давления в смазочном слое ползуна и коэффициент трения

В дальнейшем распределение давления будет исследовано только для смазочного слоя ползуна, с тем чтобы показать способность смазочного слоя развивать поддерживающее усилие и тем самым не допускать сухого соприкосновения трущихся поверхностей, а также определить коэффициент трения.

Для исследования закона распределения давления введем в уравнение (13-6) величину (фиг. 13-5):

$$h=(a-x)\operatorname{tg}\theta$$

и проинтегрируем его. Получим:

$$p-p_0=\frac{6\mu U}{\operatorname{tg}^2\theta}\left[\int_0^x\frac{dx}{(a-x)^2}-\frac{h_0}{\operatorname{tg}\theta}\int_0^x\frac{dx}{(a-x)^3}\right],$$

или

$$p-p_0=\frac{6\mu U}{\operatorname{tg}^2\theta}\left[\frac{x}{(a-x)a}-\frac{b_0}{2}\cdot\frac{2ax-x^2}{(a-x)^2a^2}\right], \qquad (13\text{-}9)$$

где p_0 — давление в начале $(x=0)$ и в конце ползуна $[x=(a-b)]$;

$b_0=\frac{h_0}{\operatorname{tg}\theta}$ — размер, определяющий сечение с максимальным давлением.

Этот размер можно определить, положив в уравнении (13-9)

$$p = p_0 \quad \text{и} \quad x = a - b.$$

Для b_0 получим:

$$b_0 = \frac{2ab}{a + b}. \tag{13-10}$$

Подставляя в уравнение (13-9) значение b_0 и обозначая $a - b = e$, будем иметь:

$$p - p_0 = \frac{6\mu U}{(a + b)\,\mathrm{tg}^2\theta} \cdot \frac{e^2}{a^2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{x}{e}}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}. \tag{13-11}$$

Эпюра разности давлений изображена на фиг. 13 5.

Величину поддерживающей силы P найдем, взяв интеграл

$$P = \int_0^e (p - p_0)\,B\,dx = \frac{6\mu UB}{(2a - e)\,\mathrm{tg}^2\theta} \int_0^e \frac{x(e - x)}{(a - x)^2}\,dx = \frac{\mu U}{\mathrm{tg}^2\theta}\,\varphi_1, \tag{13-12}$$

где B — ширина ползуна, а

$$\varphi_1 = 6\left[\ln\frac{a}{b} - 2\,\frac{a - b}{a + b}\right]B.$$

Интегрирование осуществлено подстановкой

$$a - x = \xi.$$

Среднее давление по поверхности ползуна p_{cp}, возникающее в масляном слое, будет равно:

$$p_{cp} = \frac{P}{(a + b)\,B} = \frac{\mu U}{(a + b)\,\mathrm{tg}^2\theta} \cdot \varphi_2, \tag{13-13}$$

где

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{B} = 6\left(\ln\frac{a}{b} - 2\,\frac{a - b}{a + b}\right).$$

Силу трения, действующую на опорную поверхность ползуна, вычислим по формуле

$$T = \int_{x=0}^{x=e} B\tau\,dx = -B\mu \int_{x=0}^{x=e} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dx = -B \int_{x=0}^{x=e} \left[\frac{\partial p}{\partial x}\left(z - \frac{1}{2}h\right) + \mu\frac{U}{h}\right]dx,$$

или

$$T = \frac{\mu U}{\mathrm{tg}\,\theta}\,\varphi_3, \tag{13-14}$$

где

$$\varphi_3 = \left[4\ln\frac{a}{b} - 6\,\frac{a - b}{a + b}\right]B.$$

Назовем коэффициентом трения f отношение $\frac{T}{P}$:

$$f = \frac{T}{P} = \mathrm{tg}\,\theta\,\frac{\varphi_3}{\varphi_1}. \tag{13-15}$$

Коэффициент трения можно также определить через среднее давление p_{cp}, а именно:

$$f = \frac{T}{p_{cp}(a - b)\,B} = \frac{\mu U}{p_{cp}} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta} \cdot \frac{\varphi_3}{(a - b)\,B}. \tag{13-16}$$

Подставляя в последнее значение $\mathrm{tg}\,\theta$ из формулы (13-15)

$$\mathrm{tg}\,\theta = f \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_3},$$

найдем:

$$f = \frac{\mu \cdot U}{p_{cp}} \cdot \frac{\varphi_3^2}{f\varphi_1(a - b)\,B},$$

откуда

$$f = \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \cdot \sqrt{\varphi_2} \cdot \sqrt{\frac{\mu U}{p_{cp}e}} = \varphi \sqrt{\frac{\mu U}{p_{cp}e}}, \tag{13-17}$$

где

$$\varphi = \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \cdot \sqrt{\varphi_2}$$

Таким образом, коэффициент трения для ползуна зависит от конструктивных размеров опорной поверхности ползуна и от его положения (от φ_1, φ_2 и φ_3), а также от динамического коэффициента вязкости μ, скорости ползуна и среднего давления p_{cp}. Коэффициент трения пропорционален корню квадратному из критерия подобия

$$\frac{\mu U}{p_{cp}e} = S. \tag{13-18}$$

Для геометрически подобных систем коэффициент φ имеет одно и то же значение. Поэтому f будет иметь одинаковое значение только при равенстве критерия S. По своей структуре формула (13 18) аналогична формуле (13-1).

Глава четырнадцатая

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

14-1. Поле скоростей в турбулентном потоке. Начальный участок

Хотя дифференциальные уравнения движения реальной жидкости справедливы также и для истинных скоростей турбулентного движения, однако сложность явлений, происходящих в нем, не позволяет для исследования этого потока воспользоваться в полной мере этими уравнениями. Вместо действительного турбулентного потока в гидравлике исследуется его упрощенная модель — осредненный турбулентный поток. При построении этой модели исходят из гипотезы о том, что поле скоростей в пространстве, занимаемом турбулентным потоком, можно разбить на два поля: на поле местных осредненных скоростей $\bar{u}$ и на поле пульсационных скоростей u'.

В этом потоке проекции истинных скоростей u_x, u_y и u_z можно выразить через проекции осредненных скоростей $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ и $\bar{u}_z$ и пульсационных u'_x, u'_y и u'_z, а именно

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \bar{u}_x + u'_x, \\ u_y &= \bar{u}_y + u'_y, \\ u_z &= \bar{u}_z + u'_z. \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}1)$$

Такая модель потока позволяет установить важные соотношения между осредненными характеристиками турбулентного потока (осредненными скоростями, давлениями), что и является важнейшей задачей гидравлики.

Рассматриваемые в этой главе вопросы турбулентного движения относятся к осредненному сформировавшемуся установившемуся потоку, который, так же как и ламинарный поток в трубопроводе, формируется постепенно. Длина начального участка будет зависеть от условий входа и от числа Re, соответствующего потоку. Однако роль начального участка в гидравлических расчетах турбулентных потоков незначительна. Большое количество экспериментальных исследований показывает, что практически формирование поля осредненных скоростей заканчивается на длине трубопровода, равной

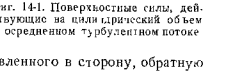
$$l_н = (40 \div 50)\,d. \qquad (14\text{-}2)$$

14-2. Дифференциальное уравнение турбулентного потока

Рассмотрим установившийся турбулентный поток в круглой трубе, симметричный относительно ее оси, со скоростями $u_x = \bar{u}_x + u'_x$, $u_r = u'_r$, где r — радиальное направление, и выяс-

ним, какое влияние оказывают пульсационные составляющие скорости на силы, возникающие в осредненном потоке[1].

В потоке выделим цилиндрический объем с радиусом r (фиг. 14-1). Благодаря пульсационной составляющей скорости u'_r через боковую поверхность рассматриваемого объема жидкости будут втекать и вытекать частицы жидкости. При этом втекающие частицы будут иметь осевую скорость $u_x = \bar{u}_x - u'_x$, меньшую, чем осевая скорость частиц, вытекающих через ту же поверхность. Но согласно уравнению неразрывности масса жидкости в объеме остается неизменной, происходит только обмен частицами, однако при этом происходит изменение количества движения рассматриваемого объема, что равносильно действию на поверхности рассматриваемого объема импульса внешних сил, направленного в сторону, обратную движению.



Фиг. 14-1. Поверхностные силы, действующие на цилиндрический объем в осредненном турбулентном потоке

Частица жидкости, имевшая осредненную скорость в осевом направлении $\bar{u}_x$, попадает в область цилиндра, пересекая боковую поверхность и углубляясь на некотором расстоянии l', где осевая скорость имеет значение $\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} l'$, внося с собой меньшее количество движения, чем выносит из того же объема вытекающая частица. Если обозначить поперечную пульсационную составляющую скорости этой частицы через u'_r, то количество массы, которое будет перенесено через единицу площади боковой поверхности в единицу времени, будет равно $\rho u'_r$, а уменьшение количества движения за то же время в направлении оси движения равно.

$$\rho u'_r \cdot \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \cdot l'.$$

Этой величине и будет равен направленный в сторону, обратную движению, импульс внешних сил τ. Таким образом,

$$\tau = \rho u'_r \cdot \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \cdot l', \qquad (14\text{-}3)$$

[1] Исходными уравнениями для исследований турбулентного движения могут послужить дифференциальные уравнения осредненного турбулентного потока, получаемые путем осреднения дифференциальных уравнений Навье Стокса. Однако почти те же результаты можно получить и более просто, что в дальнейшем будет сделано.

где τ — напряжение тех дополнительных поверхностных сил, которые компенсируют влияние перемешивания частиц, а величина l' носит название длины пути перемешивания. Под этой длиной следует подразумевать расстояние, которое должна пройти в поперечном направлении частица для того, чтобы успеть приобрести скорость, соответствующую той точке, в которую она попадает.

Для дальнейшего важным является установление связи между новыми и неизвестными величинами u'_r, l' и $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}$. Связь эта устанавливается на основании гипотез, справедливость которых может быть проверена только путем сопоставления полученных результатов с опытными данными. Наиболее распространенной гипотезой является предположение о том, что пульсационная составляющая скорости пропорциональна $l' \cdot \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}$, т. е.

$$u'_r \approx l' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}.$$

При этом

$$\tau \approx \rho l'^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}\right)^2.$$

Включив коэффициент пропорциональности в l', формулу для τ можно представить в виде:

$$\tau = \rho l'^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}\right)^2. \qquad (14\text{-}4)$$

В этой формуле l' попрежнему называется длиной пути перемешивания, хотя физический смысл этой величины и отличается от значения l', ранее введенного[1].

Заметим, что, несмотря на сложность физического смысла величины l', закон ее распределения по потоку может быть найден экспериментально, так как на основании опытных данных можно вычислить l'^2, которое равно:

$$l'^2 = \frac{\tau}{\rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}\right)^2}. \qquad (14\text{-}5)$$

Формула (14-4) определяет то дополнительное касательное напряжение, которое создается на боковой поверхности цилиндра в установившемся турбулентном потоке благодаря только пульсационным составляющим скоростей (благодаря турбулентности)

[1] Заметим, что сопоставление уравнения (14-3) с уравнением, получаемым путем осреднения уравнений Навье-Стокса, позволяет установить зависимость $l' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = u'_x$, а $\tau = \rho u'_x u'_r$.

Общее напряжение трения принято определять как сумму напряжений, обусловленных вязкостью и турбулентностью:

$$\tau = \pm \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} + \rho l'^2 \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2. \qquad (14\text{-}6)$$

Влияние каждого из членов, входящих в уравнение (14-6), в различных местах потока сказывается по-разному. Вблизи стенок в районе ламинарного слоя главным образом проявляется влияние вязкости. В центральной зоне — влияние турбулентности.

Таким образом, в установившемся турбулентном потоке на цилиндрический объем будут действовать силы, показанные на фиг. 14-1, а уравнение движения этого объема может быть представлено в виде:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - 2\pi r l\tau = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} \cdot r. \qquad (14\text{-}7)$$

Обозначим через τ_0 напряжение сил трения на стенке. Из уравнения (14-7) следует, что

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2l} \cdot r_0, \qquad (14\text{-}8)$$

или

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{r}{r_0}, \qquad (14\text{-}9)$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае касательное напряжение распределяется по линейному закону, так же как и в аналогичном случае ламинарного движения (фиг. 12-4).

В связи с формулой (14-9) дифференциальное уравнение установившегося турбулентного потока можно представить в виде[1]:

$$\tau_0 \cdot \frac{r}{r_0} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \rho l'^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2. \qquad (14\text{-}10)$$

[1] В дальнейшем в турбулентном движении под u всюду будет подразумеваться осредненная осевая скорость $\bar{u}_x$.

Величина $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ имеет размерность скорости и называется „скоростью касательного напряжения". Обозначим ее через v_*:

$$v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{p_1 - p_2}{2l} \cdot r_0. \tag{14-11}$$

Скорость v_* является одной из важнейших характеристик турбулентного потока. Для данного потока v_* является величиной постоянной

14-3. Распределение скоростей по сечению турбулентного потока[1]

При исследовании закона распределения скоростей в круглом трубопроводе воспользуемся уравнением (14-10), пренебрегая в нем членами, зависящими от вязкости. Представим это уравнение в виде:

$$v_*^2 \cdot \frac{r}{r_0} = l'^2 \left(\frac{du}{dr}\right)^2 \tag{14-12}$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать закон, которому подчиняется величина l'. Выяснению этого закона было посвящено много работ и предложено достаточно большое количество формул для выражения этого закона. Все эти формулы являются эмпирическими и приближенными. В зависимости от применяемой формулы для l' получается то или другое выражение для распределения скоростей. Наибольшее применение в инженерном деле нашла логарифмическая формула распределения скоростей.

Проф. А. А. Саткевич принял для отношения l'/r_0 следующую зависимость:

$$\frac{l'}{r_0} = \varkappa\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\sqrt{\frac{r}{r_0}} \tag{14-13}$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная для данного потока величина.

Подставляя это значение в уравнение (14-12), получим:

$$v_*^2 = \varkappa^2\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{du}{dr}\right)^2,$$

откуда

$$\int_u^{u_{макс}} du = -\frac{v_*}{\varkappa}\int_{r_0}^{0} \frac{d\left(\frac{r}{r_0}\right)}{1 - \frac{r}{r_0}}.$$

Знак „ * взят потому, что при $dr > 0$ всегда $du < 0$.

[1] О распределении скоростей в открытом канале будет изложено в гл. 25.

После интегрирования получаем (для $r < r_0$):

$$\frac{u_{макс} - u}{v_*} = -\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{r_0 - r}{r_0}. \tag{14-14}$$

Обозначая расстояние от стенки до рассматриваемого слоя через

$$y = r_0 - r,$$

будем иметь.

$$\frac{u_{макс} - u}{v_*} = -\frac{1}{\varkappa}\cdot\ln\frac{y}{r_0} = -\frac{2{,}3}{\varkappa}\lg\frac{y}{r_0}. \tag{14-15}$$

Эту же формулу можно представить и в виде:

$$\frac{u}{v_*} = A + \frac{2{,}3}{\varkappa}\lg\frac{yv_*}{\nu}, \tag{14-16}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, v_*, $\varkappa$ и A — постоянные.

Формула выражает так называемый логарифмический закон распределения скоростей в трубопроводе (за исключением пристенной области).

На фиг. 14-2 изображено несколько линий согласно уравнению (14-14), каждая из которых соответствует некоторому постоянному значению $\varkappa = 0{,}28 \div 0{,}46$. На той же фигуре точками показаны экспериментальные значения $\frac{u_{макс} - u}{v_*}$ для потока в гладких трубах при $Re = 396\,000$. Из фигуры следует, что экспериментальные точки не располагаются вдоль одной и той же линии, а пересекают линии с разными значениями $\varkappa$, изменяющимися в широких пределах. Аналогичная картина наблюдается в потоках и при других значениях числа Re и не только в гладких, но и в шероховатых трубах. В гладких трубах при больших значениях Re хорошее совпадение с опытом получается только в области $\frac{r}{r_0} = 0{,}15 \div 0{,}5$ при $\varkappa = 0{,}4$.

Поэтому формулу (14-14), получившую наибольшее распространение в гидравлических расчетах, следует рассматривать только как приближенную. Величину $\varkappa$ нельзя рассматривать как постоянную не только для потоков с различными значениями Re, но и в потоке с заданным значением Re.

Заметим, что формула (14-14) дает максимальное значение $u_{макс}$ на оси потока. Однако это является следствием условий, положенных в основу ее вывода.

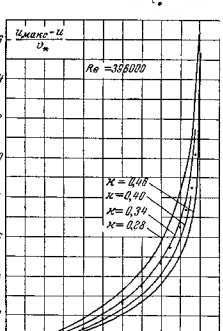
На фиг. 14-3 сплошная линия соответствует формуле (14-14) и $\varkappa = 0{,}31$. Точками показаны экспериментальные данные как для гладких, так и для шероховатых трубопроводов.

При $\varkappa = 0{,}4$ формулу (14-15) можно представить в виде

$$\frac{u_{макс} - u}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y}{r_0}. \qquad (14\text{-}17)$$

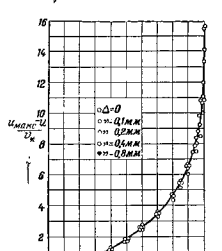
При том же значении $\varkappa$ и $A = 5{,}5$ формула (14-16) может быть записана в виде

$$\frac{u}{v_*} = 5{,}5 + 5{,}75 \lg \frac{y v_*}{\nu} \qquad (14\text{-}18)$$



Фиг. 14-2. Зависимость недостатка скорости от r/r_0.

Точками показаны экспериментальные данные для гладких труб при $Re = 356\,000$. Сплошные линии соответствуют различным значениям $\varkappa$.



Фиг. 14-3. Зависимости недостатка скорости от r/r_0 для гладких и шероховатых труб

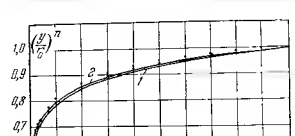
(для пристенного слоя лучшее совпадение с опытом получается при $A = 5{,}8$).

В некоторых случаях неплохое совпадение (фиг. 14-4) с опытом (для $y/r \leq 0{,}8$) дает эмпирическая формула

$$\frac{u}{u_{макс}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n, \qquad (14\text{-}19)$$

выражающая так называемую степенную зависимость. В этой формуле n зависит от Re. При $Re = 26\,000 \div 3\,240 \cdot 10^3$, n изменяется соответственно в пределах

$$n = 0{,}1515 \div 0{,}10$$



Фиг. 14-4. Зависимость $\frac{u}{u_{макс}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n$ от $\frac{y}{r_0}$ в гладких трубах при разных значениях n: 1 — $n = 0{,}102$; 2 — $n = 0{,}10$.

Верхние точки соответствуют $Re = 3\,240\,000$, нижние $Re = 1\,530\,000$.

Для определения средней скорости вычислим сначала расход, воспользовавшись формулой (14-15):

$$Q = \int_\omega u\,d\omega = \int_\omega \left(u_{макс} + \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{y}{r_0}\right) 2\pi r\,dr.$$

Заменяя r на $r_0 - y$, будем иметь:

$$Q = u_{макс}\,\omega + \frac{2\pi v_*}{\varkappa} \int_0^{r_0} \ln \frac{y}{r_0} (r_0 - y)\,d(r_0 - y).$$

Интегрируя, получим:

$$Q = u_{макс}\,\omega - \frac{2\pi v_* r_0^2}{\varkappa} \left[\left(\frac{y}{r_0} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{y}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r_0}\right)^2 \ln \left(\frac{y}{r_0}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right]_{(y/r_0)=0}^{y/r_0=1},$$

или

$$Q = \left(u_{макс} - \frac{3}{2\varkappa} v_*\right)\omega. \qquad (14\text{-}20)$$

Среднюю скорость вычислим по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} = u_{макс} - \frac{3}{2\varkappa} v_*. \qquad (14\text{-}21)$$

При $\varkappa = 0{,}4$

$$v = u_{макс} - 3{,}75 v_*, \qquad (14\text{-}22)$$

или

$$\frac{u_{макс} - v}{v_*} = 3{,}75.$$

На основании исследований потоков в гладких трубах для $u_{макс}$ автором предложена формула

$$u_{макс} = (5{,}1 \lg Re - 0{,}5) v_*. \qquad (14\text{-}23)$$

При этом для v согласно (14-22) получим.

$$v = (5{,}1 \lg Re - 4{,}25) v_*,$$

или

$$v = 5{,}1 \lg \frac{Re}{6{,}81} v_*. \qquad (14\text{-}24)$$

Из формул (14-23) и (14-24) имеем:

$$m = \frac{u_{макс}}{v} = \frac{5{,}1 \lg Re - 0{,}5}{5{,}1 \lg Re - 4{,}25}, \qquad (14\text{-}25)$$

что дает для $Re = 10^4$

$$m = \frac{19{,}9}{16{,}5} = 1{,}23;$$

для $Re = 10^6$

$$m = \frac{30{,}1}{26{,}35} = 1{,}145.$$

Напомним, что в ламинарном потоке $m = 2$ и не зависит от числа Re.

Формулами (14-14) (14-25) решаются вопросы, относящиеся к исследованию поля скоростей турбулентного установившегося и сформировавшегося движения в гладких трубопроводах: сначала для заданного v_* [формула (14-11)] определяем методом подбора v из (14-24), затем, вычислив Re, находим $u_{макс}$ из (14-23); после этого строим эпюру скоростей согласно (14-14). На фиг. 14-5 изображены эпюры скоростей для турбулентного потока в гладких трубах при разных значениях чисел Re.

Формулой (14-14) воспользуемся для определения расстояния $y_{ср}$ от стенки, где скорость равна v

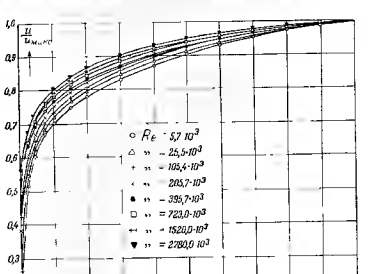
$$\frac{u_{макс} - v}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{y_{ср}}{r_0}. \qquad (14\text{-}26)$$

Воспользовавшись зависимостью (14-22), получим:

$$\ln \frac{r_0}{y_{ср}} = 1{,}5,$$

или

$$\frac{y_{ср}}{r_0} = 0{,}223. \qquad (14\text{-}27)$$



Фиг. 14-5. Зависимость u от $u_{макс}$ от r r_0 в гладких трубопроводах при разных значениях числа Re

Ф. А. Шевелев[1], исследуя потоки в шероховатых стальных и чугунных трубах, рекомендует для них

$$\frac{y_{ср}}{r_0} = 0{,}24,$$

что практически мало отличается от приведенного выше.

Заметим, что для ламинарного движения $\frac{y_{ср}}{r_0} = 0{,}295$. Таким образом, вблизи стенок в турбулентном потоке скорости возрастают быстрее, чем в ламинарном потоке.

14-4. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ при турбулентном движении

В отличие от ламинарного движения, при котором формула для коэффициента сопротивления трения λ была получена теоретически, при турбулентном движении для получения расчетных

[1] Ф. А. Шевелев, Исследование основных закономерностей турбулентного движения в трубах, Госстройиздат, Москва, 1953.

формул приходится опираться и на экспериментальные данные. Невозможность чисто теоретического вывода обусловливается тем, что уравнения энергии осредненного потока включают члены (новые неизвестные), определение которых возможно только на основании некоторых гипотез, достоверность которых может быть проведена только экспериментально Современные исследования коэффициента λ представляют сочетание экспериментальных и теоретических приемов и этим отличаются от ранних работ, базировавшихся только на опыте.

Исследованием гидравлических сопротивлений трубопроводов занимаются более 200 лет (первые опыты проведены французом Купле еще в 1732 г.). Этот большой отрезок времени можно разбить на три периода

Первый период — от опытов Купле до создания в конце XIX в. теории гидродинамического подобия. В течение этого периода исследования базировались только на экспериментальных данных. Полученные результаты можно было использовать только для условий, во всем тождественных условиям эксперимента. Теоретическая база эксперимента еще не была разработана, благодаря этому не представлялось возможным обобщение результатов многочисленных экспериментальных работ.

Второй период — от конца XIX в. до тридцатых годов XX в., — ознаменовавшийся успехами в исследованиях гидравлических сопротивлений благодаря применению законов гидродинамического подобия и теории размерности при обработке экспериментальных данных. Это позволило обобщить результаты предшествующих опытов и найти закономерности, не потерявшие своего значения до настоящего времени.

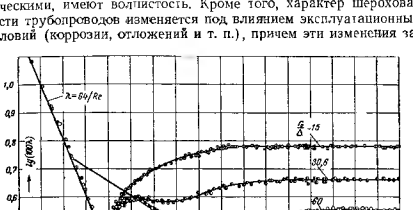
Третий современный период берет свое начало с тридцатых годов нашего столетия. В течение последнего двадцатилетия были разрешены важные для гидравлики турбулентного потока вопросы. Использование их для определения гидравлических сопротивлений дало весьма хорошие результаты. Однако и до сего времени многие вопросы, относящиеся к этой области, еще полностью не разрешены.

Выдающийся вклад в исследование гидравлических сопротивлений внес Н Н. Павловский. В наше время решением этих вопросов занимаются многие советские гидравлики: И И. Агроскин, А. Д Альтшуль, П. Ф Горбачев, В. П. Гончаров, В. Н. Евренов, И. А. Исаев, П. К. Конаков, Г. А. Мурин, Г. К Филоненко, Н. З. Френкель, Ф А. Шевелев и др.

Из иностранных работ следует отметить исследования Т. Кармана, Л. Прандтля, И. Никурадзе, Кольбрука, Уайта, Миллера.

Трудность решения этой проблемы обусловливается сложностью процессов, совершающихся в турбулентном потоке вообще и, в частности, в трубопроводах В инженерном деле широкое применение находят трубопроводы самых разнообразных сечений

(круглые, кольцевые, овальные, прямоугольные и др) Стенки этих трубопроводов имеют различную поверхность, причем шероховатость стенок оказывается настолько сложной и разнообразной, что с трудом поддается описанию: поверхность покрыта беспорядочно разбросанными выступами различной формы; даже стеклянные трубы, которые часто называют гладкими и цилиндрическими, имеют волнистость. Кроме того, характер шероховатости трубопроводов изменяется под влиянием эксплуатационных условий (коррозии, отложений и т. п.), причем эти изменения за-



Фиг. 14-6 Зависимость λ от Re (в логарифмическом масштабе) для трубопроводов с зернистой шероховатостью

ранее предвидеть невозможно.В газопроводах наблюдались случаи, когда шероховатость трубопровода в процессе эксплуатации существенно уменьшалась. Он отшлифовывался от воздействия взвешенных твердых частиц, находившихся в газе[1] Добавим, что существенное влияние на характер потока, а значит и на гидравлическое сопротивление, оказывают стыки труб, сварочные швы и вод других причин, относящихся к качеству монтажа трубопроводов.

Современные экспериментальные работы по исследованию гидравлических сопротивлений трубопроводов следует разбить на две группы. К первой группе отнесены исследования коэффи-

[1] Автор вел наблюдение над трубопроводом $D = 53$ *мм* в течение тринадцати лет. По этому трубопроводу прокачивалась в условиях лаборатории чистая вода Трубопровод весьма часто освобождался от воды. За это время гидравлическое сопротивление трубопроводов увеличилось на 65%.

циента λ, выполненные в трубопроводах с искусственной шероховатостью, ко второй группе — с естественной шероховатостью. Искусственная шероховатость создавалась следующим образом внутренние стенки труб сначала покрывались лаком, затем труба заполнялась песком определенной зернистости (со средним диаметром Δ), приклеивавшимся к стенкам однородным слоем. После этого бугристая поверхность вновь покрывалась лаком и высушивалась. Относительная шероховатость характеризовалась отношением $\frac{\Delta}{d}$. Такую однородную искусственную шероховатость в дальнейшем будем называть зернистой.

Фиг. 14-7. Зависимость λ от $\lg Re$ для трубопроводов с естественной шероховатостью

Ко второй группе отнесены исследования промышленных трубопроводов с их натуральной шероховатой поверхностью. Шероховатость промышленных трубопроводов в настоящее время характеризуется некоторой величиной Δ, эквивалентной зернистой шероховатости, вызывающей в трубопроводе того же размера и при определенных условиях (т. е. при одних и тех же числах Re и расходах) одинаковые потери удельной энергии.

Результаты исследований тех и других трубопроводов изображены на фиг. 14-6 и 14-7. На оси абсцисс этих фигур отложены значения $\lg Re$, а на оси ординат — на фиг. 14-6 значения $\lg 100\lambda$ (100λ во избежание отрицательных значений $\lg\lambda$) и на фиг. 14-7 — численные значения λ. На фиг. 14-6 все линии берут начало в области, соответствующей ламинарному движению, где значения коэффициента λ имеют для всех труб одно и то же значение, зависящее только от величины числа Re.

При переходе в область турбулентного движения изменяется характер влияния на коэффициент λ и числа Re и шероховатости $\frac{\Delta}{d}$. Из исследованных трубопроводов выделяются сперва так называемые гладкие трубы, для них значения λ группируются около одной и той же линии (линия „гладких труб"). Вдоль той же линии группируются вначале и значения λ для некоторых шероховатых труб (причина этому будет объяснена позже). В этом случае шероховатую трубу называют гидравлически гладкой[1].

[1] Установлено, что даже стеклянные трубы в действительности имеют шероховатость, которая, однако, в отличие от волнистости не существенна.

Обработка экспериментальных данных для труб с зернистой шероховатостью показывает, что это имеет место при

$$Re < 27{,}0\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{8/7}.$$

В дальнейшем для каждой шероховатой трубы значения коэффициента λ располагаются вдоль индивидуальных линий, параметром которой является $\frac{\Delta}{d}$. Чем больше значение $\frac{\Delta}{d}$, тем выше располагается соответствующая линия. Обращается внимание на то, что в трубах с натуральной шероховатостью коэффициенты λ монотонно убывают с увеличением числа Re в отличие от трубопроводов с зернистой шероховатостью, характерным для которой является во многих случаях „впадина", нарушающая монотонность в изменении λ. Аналогичная впадина была получена и А. П. Зегжда в опытах в открытых каналах со стенками также с зернистой шероховатостью. При увеличении значений числа Re в шероховатых трубах влияние его убывает и для каждой трубы наступает предел, при котором влиянием Re можно уже пренебречь. В этой области коэффициент λ становится зависящим практически только от шероховатости $\frac{\Delta}{d}$.

Для труб с зернистой шероховатостью это имеет место при

$$Re > 382\,\frac{d}{\Delta}\lg\frac{3{,}7d}{\Delta}.$$

Таким образом, экспериментальное исследование коэффициента показывает существование пяти различных зон, каждая из которых характеризуется своими закономерностями.

Первая зона — зона ламинарного движения;

вторая зона — зона перехода турбулентного движения в ламинарное;

третья зона — зона турбулентного движения в гладких трубах и движения в шероховатых трубах, когда они обладают тем же сопротивлением, что и гладкие трубы (гидравлически гладкие трубы);

четвертая зона — общая зона турбулентного движения в шероховатых трубах, в которой на значение коэффициента λ оказывают влияние и число Re и шероховатость $\frac{\Delta}{d}$;

пятая зона — квадратичная (или автомодельная) — зона турбулентного движения в шероховатых трубах, в которой на значение коэффициента λ влияние оказывает практически только шероховатость $\frac{\Delta}{d}$.

Анализ экспериментальных данных показывает, что функциональная зависимость (11-16) представляет собой общее выражение закона изменения коэффициента λ. В частных случаях функциональная зависимость оказывается или только функцией Re, или даже только функцией $\frac{\Delta}{d}$.

Для равномерного ламинарного движения в круглых трубах

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \qquad (14\text{-}28)$$

Зона перехода турбулентного движения в ламинарное характеризуется сложным законом гидравлического сопротивления, значение коэффициента λ для этой зоны ориентировочно по исследованиям автора можно определять по формуле

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,33}}. \qquad (14\text{-}29)$$

В дальнейшем для определения коэффициента будет предложена наряду с другими формулами формула автора для турбулентного движения в промышленных шероховатых и гладких трубах:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\frac{\Delta}{3,7d} + \left(\frac{6,81}{Re}\right)^{0,9}\right]. \qquad (14\text{-}30)$$

Эта формула в случае гладких труб или при малом влиянии шероховатости, при котором членом $\frac{\Delta}{3,7d}$ можно пренебречь по сравнению с $\left(\frac{6,81}{Re}\right)^{0,9}$ примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8\lg\left(\frac{Re}{6,81}\right). \qquad (14\text{-}31)$$

При малом влиянии второго члена формула (14-30) обращается в формулу для квадратичного режима

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{3,7d}{\Delta}. \qquad (14\text{-}32)$$

В этом случае режим движения соответствует так называемому квадратичному закону сопротивления—квадратичному потому, что при λ, не зависящем от числа Re, потери удельной энергии [формула (11-18)] оказываются пропорциональными квадрату средней скорости.

Эти режимы называются автомодельными, так как при соблюдении постоянства $\frac{\Delta}{d}$ для этих режимов будет получено одно и то же значение λ, независимое от Re.

Формула (14-30) может быть использована для экспериментального определения шероховатости.

14-5. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ при турбулентном движении в гладких трубах

Дадим вывод формулы для коэффициента λ при движении жидкости в гладких трубах. Для некоторого упрощения расположим трубопровод горизонтально. Воспользуемся формулами (11-18), (11-20), (14-8) и (14-11). Получим:

$$\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{2\tau_0}{\gamma r_0},$$

откуда

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{v_*^2}{v^2}, \qquad (14\text{-}33)$$

или

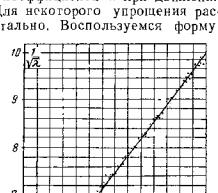
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\frac{v}{v_*}. \qquad (14\text{-}34)$$

Подставляя вместо $\frac{v}{v_*}$ его значение согласно формуле (14-24), получим для гладких труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot 5,1\lg\frac{Re}{6,81} - 1,8\lg\frac{Re}{6,81}, \qquad (14\text{-}35)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8\lg Re - 1,5. \qquad (14\text{-}36)$$



Фиг. 14-8. Зависимость коэффициента $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ от $\lg Re$ для гладких трубопроводов

На фиг. 14-8 показана зависимость $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = f(Re)$. Там же точками показаны значения λ, полученные экспериментально при исследованиях сопротивлений в гладких трубах.

На фиг. (14-6) и (14-7) значению λ, вычисленные по формуле (14-36), соответствует линия $\lambda_г$.

В табл. 14-1 приведены значения λ, вычисленные по формуле (14-36).

Формула, аналогичная (14-35), была предложена В. Миллером [1], который исходил только из экспериментальных данных. Затем эту формулу обосновывал П. К. Конаков [2]. В последнее время советскими учеными А. Д. Альтшулем [3], И. А. Исаевым [4],

[1] B. Miller Chem. and Metal. Eng., 44, 1937, № 10
[2] П. К. Конаков, Доклады АН СССР, 1946, № 7
[3] А. Д. Альтшуль, Доклады АН СССР, новая серия, 1950, № 5
[4] И. А. Исаев, „Нефтяное хозяйство", 1951, № 5

Таблица 14-1

Значения коэффициента λ для гладких трубопроводов применительно к формуле (14-36)

Re	λ		λ	Re	λ
4 000	0,0403	45 000	0,0212	450 000	0,0133
5 000	376	50 000	207	500 000	130
6 000	356	60 000	198	600 000	126
7 000	340	70 000	192	700 000	123
8 000	328	80 000	186	800 000	121
10 000	308	100 000	178	1 000 000	116
15 000	276	150 000	164	1 500 000	108
20 000	257	200 000	155	2 000 000	103
25 000	243	250 000	148	2 500 000	100
30 000	233	300 000	143	3 000 000	096
35 000	224	350 000	14[illegible]	3 500 000	0,0095
40 000	0,02[illegible]7	400 000	0,0130		

Г. К. Филоненко[1], Ф. А. Шевелевым[2] предложены другие формулы для расчетов в гладких трубах, дающие практически те же значения λ, что и формулы (14-35) и (14-36).

В гидравлических расчетах гладких трубопроводов при турбулентном движении широкое применение нашла формула немецкого ученого Блазиуса, полученная им в 1912 г. путем обобщения большого числа опытов, выполненных многими исследователями. Формула Блазиуса может применяться при $Re \leq 100\,000$ и имеет вид:

$$\lambda = \frac{[illegible]}{\sqrt[4]{100Re}}. \qquad (14\text{-}37)$$

Использование формулы Блазиуса для определения потерь энергии в гладких трубах позволяет установить, что в пределах ее применимости потери удельной энергии оказываются пропорциональными средней скорости v в степени 1,75.

Из других формул следует отметить формулу Кармана-Прандтля. Эта формула может быть получена из уравнения (14-18), написанного для средней скорости

$$\frac{v}{v_*} = 5{,}5 + 5{,}75 \cdot \lg \frac{y_{ср} v_*}{\nu}, \qquad (14\text{-}38)$$

[1] Г. К. Филоненко, О коэффициенте сопротивления для гладких труб, „Известия ВТИ", 1948, № 10.

[2] Ф. А. Шевелев, Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах, Госстройиздат, Москва, 1953.

откуда в связи с формулами (14-27) и (14-33), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(5{,}5 + 5{,}75 \cdot \lg \frac{0{,}223 r_0 v \sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}\,\nu}\right),$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0{,}8 \qquad (14\text{-}39)$$

Формула Кармана-Прандтля дает хорошее совпадение с опытом. Ее недостатком является необходимость определения λ методом подбора.

Для последующего полезно формулу (14-39) преобразовать. Представим ее в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[5{,}5 + 5{,}75 \lg\left(\frac{0{,}223 r_0 v_*}{\nu} \cdot \frac{\Delta}{\Delta}\right)\right],$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r_0}{\Delta} = 2 \lg \frac{v_* \Delta}{\nu} + 0{,}7. \qquad (14\text{-}40)$$

14-6. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ в квадратичной зоне

Воспользуемся формулой (14-15) для скорости v_Δ на расстоянии Δ от стенки

$$\frac{u_{макс} - v_\Delta}{v_*} = \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg\left(\frac{r_0}{\Delta}\right).$$

Максимальную скорость выразим через v, имея в виду формулу [аналогичную формуле (14-25)]

$$u_{макс} = m \cdot v.$$

Получим:

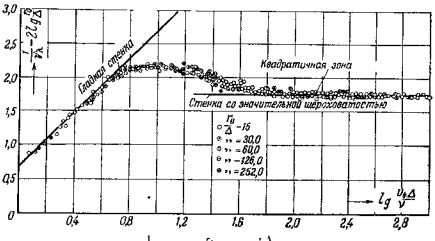
$$m \frac{v}{v_*} = \frac{v_\Delta}{v_*} + \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{r_0}{\Delta}.$$

Заменяя

$$\frac{v}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}},$$

будем иметь:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{v_\Delta}{v_* m \sqrt{8}} + \frac{2{,}3}{m \varkappa \sqrt{8}} \lg \frac{r_0}{\Delta}.$$



Фиг. 14.9. Зависимость $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2\lg\frac{r_0}{\Delta}$ от $\lg\frac{v_\Delta\Delta}{\nu}$ для трубопроводов с зернистой шероховатостью

Хорошее совпадение с опытом получается для квадратичных режимов при:

$$\frac{v_\Delta}{v_m\sqrt{\lambda/8}} = 1{,}74$$

и

$$\frac{2{,}3}{m\times\sqrt{\lambda/8}} = 2$$

В этом случае для $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ получим формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}74 + 2\lg\frac{r_0}{\Delta}, \qquad (14\text{-}41)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{3{,}7d}{\Delta}. \qquad (14\text{-}42)$$

На фиг. 14.9 показана экспериментальная проверка формул (14-39) и (14-41) по результатам испытания труб с зернистой шероховатостью. По оси ординат отложено значение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2\lg\frac{r_0}{\Delta}\right),$$

а по оси абсцисс—логарифм отвлеченной величины

$$\frac{v_\Delta\Delta}{\nu} = \frac{Re\sqrt{\lambda/8}}{\Delta/d}.$$

В этих координатах формула (14-41) изображается горизонтальной прямой с ординатой 1,74.

Линия, соответствующая гладким стенкам на фиг. 14-9, удовлетворяет уравнению (14-40). Из этой фигуры следует, что для трубопроводов с зернистой шероховатостью:

1) Практически режим движения уже можно считать квадратичным, если

$$\lg\frac{v_\Delta\Delta}{\nu} = \lg\left(\frac{v\Delta}{\nu}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\right) = \lg\frac{Re\sqrt{\lambda}\,\frac{\Delta}{r_0}}{5{,}66} > 1{,}83,$$

или для режимов, для которых

$$Re > \frac{191{,}2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{d}{\Delta}.$$

2) Трубы ведут себя как гладкие для значений

$$\lg\frac{v_\Delta\Delta}{\nu} = \lg\frac{Re\sqrt{\lambda}\,\Delta}{5{,}66r_0} < 0{,}549.$$

Если для вычислений λ воспользоваться формулой (14-37), то последнюю формулу можно представить в виде:

$$Re \leqslant 27{,}0\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{8/7}.$$

При режимах, для которых Re меньше $27{,}0\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{8/7}$, трубу можно считать гидравлически гладкой.

Для зоны, режим которой удовлетворяет неравенству

$$27{,}0\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{8/7} < Re < \frac{191{,}2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{d}{\Delta},$$

коэффициент λ зависит и от шероховатости и от Re:

$$\lambda = f\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right).$$

Теоретическое обоснование расчетной формулы для коэффициента λ в этой зоне будет дано в следующем параграфе только для труб с естественной шероховатостью.

Выясним те физические причины, благодаря которым гидравлическое сопротивление шероховатой трубы оказывается одинаковым с гладкой трубой. Источником вихреобразования является стенка. Шероховатость стенки способствует тому, что возникающие у стенки вихри при некоторых случаях обтекания неровностей стенки, отрываясь от стенки и попадая в центральную часть потока, усиливают турбулентность, влияя тем самым на гидравлическое сопротивление.

Влияние шероховатости особенно сказывается, если размеры ее таковы, что неровности входят в область потока с уже развитой турбулентностью. При относительно малых размерах неровностей может оказаться, что они находятся в той пристенной части потока толщиной β, которая практически может рассматриваться находящейся в условиях, близких к ламинарному движению. В этом случае небольшие вихри, даже те, которые срываются с неровностей, не попадают в центральную зону потока. В этом проявляется сглаживающее действие пристенного слоя толщиной β.

Принято считать шероховатую трубу гидравлически гладкой, если высота неровностей Δ меньше β:

$$\Delta < \beta.$$

Приближенно толщину пристенного слоя β определим следующим образом. Обозначим скорость на границе пристенного слоя через v_β. Воспользуемся формулой (14-16), приняв $A = 5{,}8$:

$$\frac{u_\beta}{v_*} = 5{,}8 + \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{\beta v_*}{\nu} \tag{14-43}$$

Для пристенного слоя можно принять:

$$\tau = \mu \frac{u_\beta}{\beta} = \tau_0,$$

или

$$\beta = \mu \frac{u_\beta}{\tau_0} = \nu \cdot \frac{u_\beta}{v_*^2}.$$

Подставляя значение β в (14-43), будем иметь:

$$\frac{u_\beta}{v_*} = 5{,}8 + \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{u_\beta v_*}{\tau_0 \nu},$$

или

$$\frac{u_\beta}{v_*} = 5{,}8 + \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{u_\beta}{v_*}.$$

Решив это уравнение (при $\varkappa = 0{,}4$), найдем:

$$\frac{v_\beta}{v_*} = 12{,}1,$$

при этом значении

$$\beta = \frac{12{,}1\nu}{v_*}, \tag{14-44}$$

или в связи с формулой (14-33)

$$\beta = \frac{12{,}1\nu\sqrt{8}}{v\sqrt{\lambda}} = \frac{34{,}21d}{Re\sqrt{\lambda}}. \tag{14-45}$$

Из формулы (14-41) следует, что для шероховатых трубопроводов в квадратичной области

$$\frac{v}{v_*} = 5{,}66 \lg \frac{3{,}7d}{\Delta}. \tag{14-46}$$

Величина Δ должна быть задана техническими условиями на проектирование трубопровода с учетом эксплуатационных условий. При необходимости величина шероховатости должна быть принята со значительным запасом на случай загрязнения труб, коррозии и т. п.[1]. Ориентировочно можно рекомендовать следующие значения Δ, *мм*

для новых стальных труб	0,0,5—0,1 *мм*
для стальных труб, не бывших в эксплуатации	0,15 *мм*
для чугунных труб, не бывших в эксплуатации	0,25 *мм*
для труб, бывших в эксплуатации	0,5 *мм*
для труб загрязненных	1—2 *мм*[1]

Таблица 14-2

Значения коэффициента λ для металлических трубопроводов (ГОСТ 3262-46, 301-44 и 3101-46), вычисленные для квадратичной зоны по формуле (14-42)

$$\lambda = \frac{0{,}25}{\left(\lg \frac{3{,}7d}{\Delta}\right)^2}$$

d, *мм*	$\Delta = 0{,}1$ *мм*	$\Delta = 0{,}2$ *мм*	$\Delta = 0{,}3$ *мм*	$\Delta = 0{,}5$ *мм*
27	0,02779	0,03433	0,03929	0,04723
35,75	0,02539	0,03143	0,03575	0,04260
41	0,02471	0,03015	0,03420	0,04058
53	0,02306	0,02794	0,03154	0,03717
68	0,02162	0,02602	0,02925	0,03425
80,5	0,02072	0,02483	0,02783	0,03247
81	0,02068	0,02479	0,02779	0,03240
100	0,01954	0,02342	0,02617	0,03037
106	0,01936	0,02306	0,02574	0,02984
125	0,01861	0,02209	0,02461	0,02842
131	0,01840	0,02183	0,02429	0,02803
158	0,01764	0,02084	0,02313	0,02660
159	0,01759	0,02078	0,02306	0,02651
205	0,01661	0,01952	0,02159	0,02471
207	0,01657	0,01947	0,02154	0,02464
257	0,01580	0,01849	0,02040	0,02325
259	0,01577	0,01846	0,02036	0,02320
307	0,01521	0,01774	0,01954	0,02219
309	0,01518	0,01771	0,01950	0,02215
357	0,01472	0,01723	0,01883	0,02135
361	0,01469	0,01709	0,01878	0,02129
402	0,01435	0,01666	0,01829	0,02070
468	0,01429	0,01663	0,01825	0,02064

[1] По наблюдениям автора, упомянутым в сноске на стр. 291, шероховатость трубопровода за время эксплуатации изменилась с $\Delta = 0{,}065$ *мм* до $\Delta = 0{,}53$ *мм*, а λ с 0,021 до $\lambda = 0{,}038$.

По данным испытаний, проведенных ВОДГЕО (Ф. А. Шевелевым), шероховатость стальных и чугунных труб $d = 0{,}6 - 1{,}2$ *м* оказалась равной от $\Delta = 0{,}444$ до 1,4 *мм*.

В табл. 14 2 приведены значения λ, вычисленные по формуле (14-42).

14-7. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода λ для общего случая турбулентного потока

Для вывода общей формулы для коэффициента λ, которая бы оказалась пригодной для всей области турбулентного движения в любых трубопроводах, будем исходить из следующих положений.

Из предыдущего следовало, что большое значение в исследованиях гидравлических сопротивлений имеет отношение $\frac{v}{v_*}$. Для гладких труб согласно формуле (14-24) это отношение оказалось функцией числа Re. В шероховатых трубах для квадратичного режима согласно формуле (14-46) это отношение оказалось функцией шероховатости. Заметим, что в обоих случаях независимые переменные $\left(Re \text{ и } \frac{\Delta}{d}\right)$ входят под знаком логарифма.

Универсальная формула при $\frac{\Delta}{d} \to 0$ должна обращаться в формулу для гладких труб, а при $Re \to \infty$ — в формулу для квадратичного режима. Поэтому естественно предположить, что в общем случае $\frac{v}{v_*}$ является функцией и $\frac{\Delta}{d}$, и Re, и должно быть представлено в виде:

$$\frac{v}{v_*} = A \lg \left[\frac{\Delta}{3{,}7d} + \left(\frac{B}{Re}\right)^x\right],$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{\sqrt{8}} \lg \left[\frac{\Delta}{3{,}7d} + \left(\frac{B}{Re}\right)^x\right]. \qquad (14\text{-}47)$$

Числа A и B и показатель степени x легко определяются из предельных условий и могут быть приняты:

$$A = -2\sqrt{8};$$
$$B = 6{,}81;$$
$$x = 0{,}9,$$

после чего формула принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\Delta}{3{,}7d} + \left(\frac{6{,}81}{Re}\right)^{0{,}9}\right]. \qquad (14\text{-}48)$$

О значениях Δ сказано на стр. 231 и 232

Полученная формула дает хорошее совпадение с опытом для потоков в стальных трубах На фиг. 14-7 приведены результаты опытов Г А. Мурина[1], выполненных в теплотехническом институте и И. А. Исаева[2], выполненных в Нефтяном институте под руководством В. С. Яблонского. Аналогичные зависимости получены Ф. А. Шевелевым в ВОДГЕО[3], а также автором при участии П. С. Мучникова[4]. Сплошная линия на фиг. 14-7 соответствует формуле автора (14-48) при $\frac{\Delta}{d} = 0{,}000541$.

Для облегчения пользования формулой (14-48) дается ее график (фиг. 14-10) для разных значений $\frac{\Delta}{d}$.

Для общего случая турбулентного потока автором была предложена для λ формула также в виде[4]:

$$\lambda = \frac{\left(1 + \frac{8{,}06d}{\Delta Re}\right)^2}{\left(2 \lg \frac{3{,}7d}{\Delta}\right)^2}, \qquad (14\text{-}49)$$

или

$$\lambda = \lambda_{кв}\theta, \qquad (14\text{-}50)$$

где

$$\lambda_{кв} = \left(2 \lg \frac{3{,}7d}{\Delta}\right)^{-2};$$

$$\theta = \left(1 + \frac{8{,}06d}{\Delta Re}\right)^2. \qquad (14\text{-}51)$$

Формулу для θ и для воды можно представить в виде:

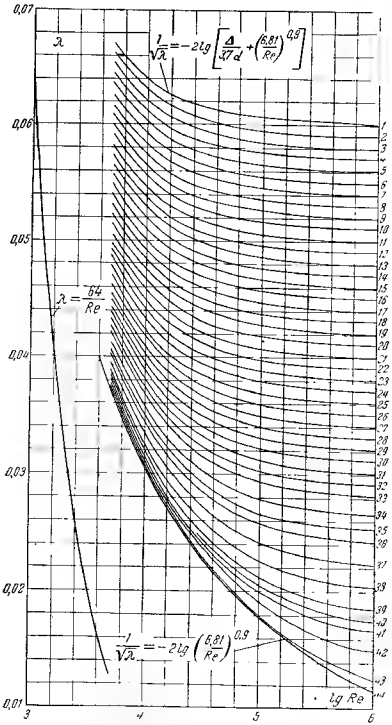
$$\theta = \left(1 + \frac{M}{v}\right)^2. \qquad (14\text{-}52)$$

Значения θ, вычисленные по этой формуле, с большой точностью совпадают с опытными данными Ф. А. Шевелева[5] при

$M = 40$ *мм/сек* — для стальных труб;
$M = 95$ *мм/сек* — для чугунных труб;
$M = 30$ *мм/сек* — для труб, бывших в эксплуатации

---

[1] Г. А. Мурин, Известия ЛТИ, № 10, 1948.
[2] И. А. Исаев, см. сноску на стр. 225.
[3] Ф. А. Шевелев, см. сноску на стр. 226.
[4] Н. З. Френкель, Основы гидравлических расчетов, Госэнергоиздат, 1951.
[5] И. И. Агроскин, Ф. И Пикалов и Г. Т Дмитриев, Гидравлика, 1954.



14-8. Некоторые другие эмпирические формулы и опытные данные для определения коэффициента λ в турбулентном движении при квадратичном режиме

Ниже приводятся эмпирические формулы, которые в настоящее время применяются в гидравлических расчетах.

1. Наибольшее распространение в советской практике имеет формула Н. Н. Павловского, полученная им в 1925 г. в результате исследования огромного экспериментального материала по движению главным образом в открытых каналах с гидравлическим радиусом $0{,}1 < R < 3$ *м*.

Формула Павловского может быть записана в виде:

$$\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = \frac{1}{n} R^{y}, \qquad (14\text{-}53)$$

где $y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}\,(\sqrt{n} - 0{,}1)$;

$R = \frac{d}{4}$ — гидравлический радиус, *м*;

n — коэффициент шероховатости (подробнее см. табл. 24-1);

Фиг. 14-10. Зависимость коэффициента λ от $\lg Re$ по формуле автора. (Каждая линия соответствует семейству трубопроводов с определенным значением $\frac{\Delta}{d}$)

№ линии	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\Delta}{d}$	0,03865	0,03234	0,03104	0,02978	0,02853	0,02730	0,02609
№ линии	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{\Delta}{d}$	0,02491	0,02375	0,02260	0,02148	0,02034	0,01932	0,01827
№ линии	15	16	17	18	19	20	21
$\frac{\Delta}{d}$	0,01723	0,01626	0,01529	0,01435	0,01343	0,01255	0,01170
№ линии	22	23	24	25	26	27	28
$\frac{\Delta}{d}$	0,01087	0,010[illegible]	0,00[illegible]3	0,00857	0,00786	0,00719	0,00654
№ линии	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{\Delta}{d}$	0,00594	0,00535	0,00480	0,00428	0,00380	0,00310	0,00255
№ линии	36	37	38	39	40	41	42
$\frac{\Delta}{d}$	0,00207	0,00157	0,00108	0,00069	0,00064	0,00041	0,00022
№ линии	43						
$\frac{\Delta}{d}$	0,000037						

$\frac{1}{n}=90$ — для новых труб;

$\frac{1}{n}=80$ — для нормальных условий;

$\frac{1}{n}=70$ — для старых труб, находящихся долгое время в употреблении;

d — диаметр трубопровода, *м*;

$g=9{,}81$ *м/сек*^{2} — ускорение силы тяжести.

В табл. 14-3 приведены значения λ, вычисленные по формуле Н. Н. Павловского (14-53).

Таблица 14-3

Значения коэффициента λ, вычисленные по формуле Павловского

d, *мм* \ n	1/90	1/80	1/70	d, *мм* \ n	1/90	1/80	1/70
27	0,03665	0,05430	0,08562	159	0,02276	0,03178	0,04666
35,75	0,03390	0,04983	0,07778	205	0,02127	0,02943	0,04358
41	0,03288	0,04786	0,07418	207	0,02117	0,02927	0,04344
53	0,03061	0,04425	0,06795	257	0,02001	0,02755	0,03960
68	0,02872	0,04103	0,06243	259	0,02001	0,02739	0,03898
80,5	0,03739	0,03907	0,05892	307	0,01915	0,02606	0,03792
81	0,02731	0,03900	0,05883	357	0,01836	0,02500	0,03540
100	0,02582	0,03656	0,05463	361	0,01829	0,02488	0,03527
106	0,02527	0,03583	0,05335	402	0,01782	0,02409	0,03386
131	0,02401	0,03367	0,04986	468	0,01711	0,02300	0,03229
158	0,02284	0,03186	0,04674				

Данные табл. 14-3, соответствующие квадратичным режимам и охватывающие типы трубопроводов, перечисленных в табл. 24-1, с большой точностью укладываются в формулу

$$\lambda=\frac{a}{d^{\nu}}, \qquad (14\text{-}54)$$

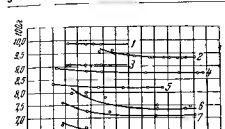
в которой по исследованиям автора для размеров диаметров, выраженных в метрах,

для $n=\frac{1}{70}$ $\quad a=0{,}025;\ \nu=0{,}3397;$

$n=\frac{1}{80}$ $\quad a=0{,}0192;\ \nu=0{,}2798;$

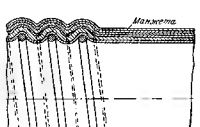
$n=\frac{1}{90}$ $\quad a=0{,}01395,\ \nu=0{,}2673.$

Формула была проверена автором для трубопроводов диаметром до $d=1{,}0$ *м*. Для диаметров в дециметрах соответственно имеем $a=0{,}05465$; $a=0{,}03656$ и $a=0{,}02582$.



Фиг. 14-11. Зависимость коэффициента λ от Re для шлангов, показанных на фиг. 14-12. Шланги испытывались уложенными как на прямую, так и вернутые в одно и два кольца с радиусом $r=1{,}5\div1$ м

1 — шланг $d=25$ *мм* с двумя кольцами, 2 — $d=50$ *мм* с двумя кольцами, 3 — $d=25$ *мм* на прямую, 4 — $d=50$ *мм* с одним кольцом, 5 — $d=50$ *мм* на прямую, 6 — $d=75$ *мм* с двумя кольцами, 7 — $d=75$ *мм* с двумя кольцами, 8 — $d=75$ *мм* на прямую



Фиг. 14-12. Схема шланга всасывающего и напорного типа.

2. Формула Скобея для деревянных труб, для воды и метровых размеров (ГОСТ 3393-46):

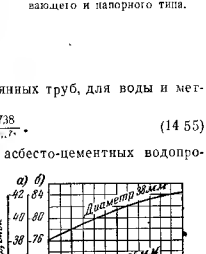
$$\lambda=\frac{0{,}01738}{v^{0{,}2}d^{0{,}2}}. \qquad (14\text{-}55)$$

3. Формула Кукушкина[1] для асбесто-цементных водопроводных труб и метровых размеров

$$\lambda=\frac{0{,}01083}{v^{0{,}192}d^{0{,}236}}. \qquad (14\text{-}56)$$

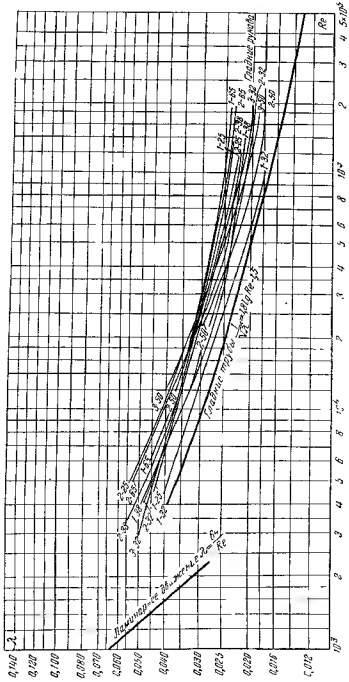
На фиг. 14-11 по исследованиям автора дана зависимость λ от Re для гибких прорезиненных шлангов, армированных внутри железной проволокой, образующей внутри шланга спираль (фиг. 14-12).

Для расчета гибких неармированных шлангов необходимо определять расчетный диаметр в зависимости от рабочего давления и номинального диаметра шланга согласно фиг. 14-13; значение коэффициента λ для этих шлангов принимать по фиг. 14-14.



Фиг. 14-13. Зависимости расчетного диаметра гладкого шланга от давления в потоке, по данным ОДГЕО.

[1] П. М. Межиборский, А. Д. Григорьев, Таблицы для гидравлического расчета асбесто-цементных труб, Госстройиздат, Москва, 1953.



Фиг. 14-14. Зависимость коэффициента λ от lg Re для гладких шлангов по данным ВОДГЕО (В. Ф. Тольпмана и Ф. А. Шевелева). Цифры указывают номер исследованного шланга и номинальный диаметр его в миллиметрах.

Для других типов можно принимать ориентировочно:
для обыкновенных пеньковых рукавов $\lambda = 0{,}0418$;
для хорошего кожаного рукава $\lambda = 0{,}0270$.

14-9. Формулы для определения в турбулентном движении потерь удельной энергии в случае труб некруглого сечения

Опыт показывает, что формулами, определяющими потери энергии в турбулентном движении в круглых трубах, можно пользоваться при любых сечениях трубопровода, заменяя в них число Рейнольдса и диаметр труб значениями, выраженными через гидравлический радиус. В этом случае формулы примут вид:

$$h_д = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}. \tag{14-57}$$

$$Re_R = \frac{Rv}{\nu}. \tag{14-58}$$

Для гладких труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}8 \lg Re_R - 0{,}416. \tag{14-59}$$

Универсальная формула

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left[\frac{\Delta}{14{,}8R} + \left(\frac{1{,}7}{Re_R} \right)^{0{,}9} \right]. \tag{14-60}$$

Для квадратичной зоны наибольшее распространение получила формула Павловского (14-53).

14-10. Неизотермическое турбулентное движение в круглой трубе. Коэффициент λ и определение потерь удельной энергии

Потери удельной энергии в неизотермическом турбулентном потоке в доквадратичной области можно найти тем же методом, который применялся и для определения потерь в ламинарном потоке (§ 12-7), а именно — или графоаналитически (фиг. 12-15) по формуле (12-50), или по данным Михеева, результаты опытов которого для ламинарного и турбулентного движения изображены на фиг. 12-16 и 12-17.

Расчет потерь в квадратичной области неизотермического потока не отличается от такого же расчета для изотермического потока, так как для квадратичной области $\lambda = \text{const}$ и не зависит от температуры жидкости.

Глава пятнадцатая

МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

15-1. Коэффициент местного сопротивления и влияние на него числа Рейнольдса

При протекании жидкости через местное сопротивление (вход в трубу, колено, клапан и т. д.) всегда происходит деформация потока, обусловливающая совместно с вязкостью дополнительное гидравлическое сопротивление.

В местном сопротивлении, как и в прямом трубопроводе, часть работы, совершаемой силами, действующими на жидкость, превращается в тепловую энергию. Причиной этих дополнительных потерь являются возникающие в потоке дополнительные вихреобразования.

Общий вид формулы для определения потерь удельной энергии в местном сопротивлении был получен в § 11-5 [формула (11 19)] в виде:

$$h_м = \zeta_м \frac{v^2}{2g}, \qquad (15\text{-}1)$$

где $\zeta_м$ — коэффициент местного сопротивления, зависящий вообще от числа Re, формы местного сопротивления, шероховатости его поверхностей и т. д., а для запорных устройств также и от степени их открытия.

Таким образом, потеря удельной энергии в местном сопротивлении определяется в долях удельной кинетической энергии (скоростного напора)

Весьма часто сечения трубопроводов, а потому и средняя скорость потока перед местным сопротивлением и за ним бывают разными Согласно формуле (15-1) потери удельной энергии могут быть вычислены через скоростной напор как перед местным сопротивлением, так и за ним. Поэтому коэффициент $\zeta_м$ может быть отнесен к любому из этих скоростных напоров, но будет при этом, конечно, иметь разное значение (обратно пропорциональное скоростным напорам)

Вследствие сложности явлений, происходящих в жидкости, протекающей через местное сопротивление, удалось формулу для коэффициента $\zeta_м$ получить теоретически лишь для некоторых простейших видов местных сопротивлений. Для подавляющего их числа коэффициент $\zeta_м$ определяется экспериментально, а его значения приводятся в гидравлических справочниках[1]. Для некоторых видов местных сопротивлений эти коэффициенты приведены в табл 15 1—15-7.

Из сопоставления формул (11-18) и (11-19) следует, что коэффициент $\zeta_м$ эквивалентен $\lambda \frac{l}{d}$. Поэтому часто потери энергии в местном сопротивлении рассматривают как потери на эквивалентной длине $l_э$ прямого трубопровода, определяя эквивалентную длину по формуле

$$\frac{l_э}{d} = \frac{\zeta_м}{\lambda}. \qquad (15\text{-}2)$$

Формула (15-2) позволяет весьма просто оценивать роль потерь удельной энергии в местном сопротивлении по сравнению с потерями по длине в общем балансе потерь.

Значения коэффициентов местного сопротивления, полученные опытным путем, можно применять только для исследованного местного сопротивления и для сопротивления, ему во всем подобного. Небольшое отступление в соотношениях размеров местного сопротивления от опытного образца, другая шероховатость смачиваемых потоком поверхностей часто сильно изменяют значение коэффициента местного сопротивления.

При определении коэффициентов $\zeta_м$ следует также иметь в виду, что на его значение существенное влияние оказывают условия подхода жидкости к пункту его расположения, так как нарушение потока, обусловленное местным сопротивлением, часто начинается на значительном от него расстоянии и заканчивается иногда далеко за ним. Близкое взаимное расположение местных сопротивлений существенно влияет на значения их коэффициентов. По имеющимся опытным данным общий коэффициент нескольких близко расположенных местных сопротивлений часто бывает меньше арифметической суммы отдельных коэффициентов, присущих этим сопротивлениям.

Поэтому большинство значений коэффициентов $\zeta_м$, приводимых в таблицах, следует рассматривать как некоторые средние. Это относится особенно к запорным устройствам с сечениями сложной формы. Весьма часто два номинально одинаковых запорных устройства имеют разное значение $\zeta_м$. В тех случаях, когда влияние этих коэффициентов на гидравлический расчет велико, а надежных опытных данных не имеется, следует рекомендовать организацию соответствующих опытов.

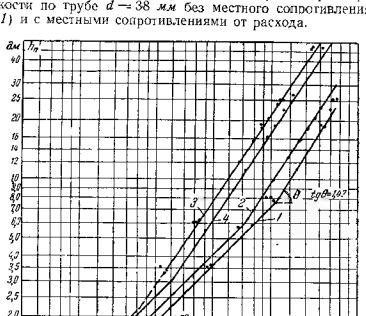
Влияние числа Re на значение коэффициента местного сопротивления особенно проявляется при малых числах Re, кото-

[1] П. Г. Киселев, Справочник по гидравлическим расчетам, Госэнергоиздат, 1950.

М. А. Мостков, Гидравлический справочник, Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1954.

Н. Н. Павловский, Краткий гидравлический справочник, Стройиздат Наркомстроя, 1940.

рым в трубопроводе без местного сопротивления соответствует ламинарное движение. При наличии местного сопротивления нарушение режима движения происходит раньше. На фиг. 15-1 показана зависимость потерь удельной энергии при прокачке жидкости по трубе $d = 38$ *мм* без местного сопротивления (линия *1*) и с местными сопротивлениями от расхода.



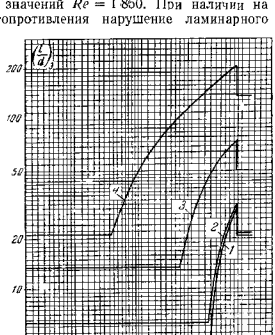
Фиг. 15-1. Зависимость потерь удельной энергии от Q в области малых значений Re при прокачке масла по трубе $d = 38$ *мм* без местного сопротивления — линия *1* и с местным сопротивлением — линия *2* — вентиль косым затвором, линия *3* и *4* — вентиль обыкновенный. Расход $Q = 1$ *л/сек* соответствовало $Re = 517$

В турбулентном движении влияние на коэффициент местного сопротивления числа Re незначительно и поэтому в турбулентном движении коэффициент $\zeta_м$ считают практически от Re независимым. На фиг. 15-2 и 15-3 приведены зависимости $\zeta_м$ и $\zeta_м\lambda$ от Re для некоторых типов местных сопротивлений, показанных на фиг. 15-4.

Данные, показанные на фиг. 15-2 и 15-3, соответствовали следующим условиям. Местное сопротивление было установлено в середине достаточно длинного трубопровода. В самом трубопроводе без местного сопротивления устанавливался ламинарный режим, сохранявшийся до значений $Re = 1\,860$. При наличии на трубопроводе местного сопротивления нарушение ламинарного течения происходило при тем меньших значениях Re, чем больше возмущений вносило местное сопротивление в поток.

При анализе влияния числа Re на коэффициент $\zeta_м$ следует различать несколько зон, характеризующихся своими законами гидравлических сопротивлений. Границы значений Re, которые определяют область применения того или иного из этих законов, могут быть установлены для каждого местного сопротивления только экспериментально.

Фиг. 15-2. Зависимость коэффициента ζ от Re в области малых значений числа Re запорных устройств, показанных на фиг. 15-4



Фиг. 15-3. Зависимость $\zeta\lambda$ от Re в области малых значений числа Re запорных устройств, показанных на фиг. 15-4.

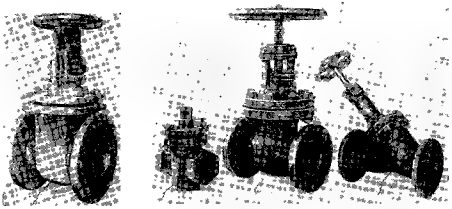
Первая зона. В этой зоне потеря удельной энергии при протекании жидкости через местное сопротивление, так же как и потери энергии по длине трубопровода в ламинарном движении

на сформировавшемся участке, пропорциональна скорости и расходу в первой степени. В этой зоне коэффициент местного сопротивления определяется по формуле

$$\zeta_м = \frac{A}{Re}, \qquad (15\text{-}3)$$

в которой A имеет значения, приведенные в табл. 15-1.

Вторая зона характеризуется тем, что в трубопроводе без местного сопротивления поток является еще ламинарным, но вследствие местного сопротивления ламинарное движение в трубопроводе нарушается. Потери напора по длине самого



Фиг. 15-4. Общий вид запорных устройств

1 — пробковый кран, 2 — задвижка, 3 — вентиль с косым затвором, 4 — вентиль обыкновенный

трубопровода на участке местного сопротивления должны определяться по основной формуле с коэффициентом $\lambda = 64/Re$. Коэффициент $\zeta_м$ в этой области подчиняется сложной зависимости. Его значения находят по данным специальных опытов. В некоторых случаях коэффициент $\zeta_м$ можно выразить формулой

$$\zeta_м = \frac{B}{Re^x}. \qquad (15\text{-}4)$$

Например, для обыкновенного вентиля (фиг. 15-4) можно принять $x = 0{,}27$. Значения коэффициента B для вентилей одного и того же типа, но отличающихся относительными размерами и некоторыми деталями (формой клапана, формой проходного отверстия), приведены в табл. 15-1. При $x = 0{,}27$ потери удельной энергии оказываются пропорциональными скорости или расходу в степени 1,73 (пунктир на фиг. 15-2).

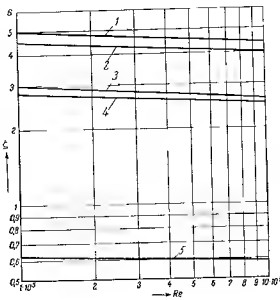
Таблица 15-1

Значения коэффициентов A, B и C в формулах для определения коэффициентов местного сопротивления в ламинарной области

Наименование сопротивления	Расчетный диаметр, мм	2 зона		3 зона
		A	B	C
Вентиль обыкновенный	27	4 950	88	565
	27	3 580	69	442
	41	3 020	84	524
	41	2 700	55	337
	53	1 778	50	309
	41	945	—	86
Вентиль с косым затвором	53	886	—	136
	75	940	—	—
Задвижка	53	400	—	59
	100	347	—	—
Пробочный кран	53	177	—	55

Третья зона характеризуется нарушением ламинарного движения в самом трубопроводе и без местного сопротивления.

Исследования автора показали, что в этом случае потери напора в местном сопротивлении оказываются пропорциональными



Фиг. 15-5. Зависимость коэффициента ζ от Re в области турбулентного движения.

1 и 2 — обыкновенный вентиль; 3 — вентиль улучшенный, 4 — вентиль с косым затвором, 5 — вентиль прямоточный

скорости (или расходу) в степени 1,47 (фиг. 15-1), а коэффициент местного сопротивления вычисляется по формуле

$$\zeta_м = \frac{C}{Re^{0,53}}, \qquad (15\text{-}5)$$

где C имеет значения, приведенные в табл. 15-1.

Четвертая зона соответствует развившемуся турбулентному движению и характеризуется малым влиянием числа Re на значение $\zeta_м$ (фиг. 15-5).

Пятая зона также соответствует развившемуся турбулентному движению, но характеризуется отсутствием влияния числа Re на значение $\zeta_м$. По аналогии с пятой зоной для коэффициента λ назовем ее квадратичной.

Как указывалось выше, влияние числа Re на коэффициент $\zeta_м$ в четвертой зоне незначительно, поэтому в практике гидравлических расчетов четвертую зону рассматривают так же, как квадратичную.

Заметим, что хотя сделанные выводы справедливы, строго говоря, лишь для исследованных типов местных сопротивлений, однако нет оснований не распространить их на другие типы.

15-2. Потеря энергии при внезапном расширении потока. Теорема Борда-Карно

Внезапное расширение потока относится к тем случаям, в которых формула для потерь энергии может быть выведена с некоторыми допущениями теоретически.

Рассмотрим поток при сопряжении двух цилиндрических труб разного диаметра (внезапное расширение) (фиг. 15-6). Жидкость вытекает из трубы меньшего сечения ω_1 в виде струи. На некотором расстоянии от начала расширения струя смешивается с окружающей ее жидкостью, увлекая ее в движение. После перемешивания живое сечение потока увеличивается и делается равным ω_2. Скорость v_2 вычисляется согласно уравнению неразрывности по формуле

$$v_2 = v_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Вследствие весьма интенсивного вихревого движения приходит в движение масса жидкости, находящаяся в объеме $cdn - abm$, почти не принимающая участия в главном движении вдоль оси. Эту область иногда не вполне точно называют застойной зоной.

Для определения величины энергии, теряемой вследствие внезапного расширения, воспользуемся уравнением Бернулли, для участка потока, ограниченного сечениями ad и mn. По сечению

ad гидродинамическое давление распределяется почти по закону гидростатики, т. е. в этом сечении давления подчиняются уравнению

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}$$

Если сечение mn расположено достаточно далеко от начала расширения, то тот же закон распределения давления можно считать существующим и в нем.

Фиг. 15-6. Схема струйного потока при внезапном расширении.

В связи с выбором сечений с гидростатическим законом распределения давлений воспользуемся уравнением Бернулли в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_м,$$

откуда искомая величина потерь во внезапном расширении

$$h_{вр} = (z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Выразим величину $h_{вр}$ через скорости, воспользовавшись тем, что dq — приращение проекции на ось потока количества движения системы материальных точек, находящихся в объеме $admn$, равна проекции на ту же ось импульса внешних сил, действующих на них. Вычислим приращение количества движения рассматриваемого объема жидкости за время dt.

За время dt струя $cbmn$, состоящая из элементарных струек, переместится в положение $c'b'm'n'$. Благодаря этому произойдет изменение количества движения жидкости, заключенной в объеме $admn$. Принимается, что движение жидкости является установившимся, а жидкость в застойной зоне не участвует в главном движении. Поэтому приращение количества движения жидкости в объеме $admn$ за время dt будет равно разности количеств движения жидкости в объемах $mnm'n'$ и $bcb'c'$. Обозначая че-

рез u и u_2 местные скорости в сечениях bc и mn, а через $d\omega$ — площади живых сечений элементарных струек, найдем, что

$$dq = \rho\left(\int_{\omega_2} u_2^2 d\omega - \int_{\omega_1} u_1^2 d\omega\right) dt.$$

Каждый из членов правой части определяет количество движения массы, протекающей в единицу времени через живое сечение потока (секундное количество движения). Выражая эти интегралы согласно формуле (10-14) через средние скорости:

$$\int_{\omega_2} \rho u_2^2 d\omega = \beta_2 \rho v_2^2 \omega_2,$$

$$\int_{\omega_1} \rho u_1^2 d\omega = \beta_1 \rho v_1^2 \omega_1,$$

получим

$$\frac{dq}{dt} = \rho(\beta_2 v_2^2 \omega_2 - \beta_1 v_1^2 \omega_1).$$

Теперь определим проекцию на ось (на направление движения) импульсов внешних сил, действующих на систему частиц жидкости, заключенных в рассматриваемом объеме.

Внешними силами, проектирующимися на ось движения, будут:

1) вес жидкости в рассматриваемом объеме, а именно

$$G = \gamma\omega_2 l,$$

где l — длина рассматриваемого отсека;

2) силы давления:

в плоскости mn сила давления жидкости на поверхность рассматриваемого сечения mn;

в плоскости ad сила давления жидкости на поверхность рассматриваемого сечения bc, а также реакция стенки трубы ab и cd.

Внешними силами трения пренебрегаем.

Ввиду того, что в сечениях cd и mn давления распределяются по гидростатическому закону, для определения сил, действующих на поперечные сечения, необходимо величину площадок умножить на давление в их центре тяжести, которое мы принимаем равным p_1 и p_2. Имея в виду, что площади поперечных сечений ad и mn равны между собой и равны ω_2, для проекции импульса Fdt получим следующее выражение.

$$Fdt = [(p_1 - p_2)\omega_2 - \gamma\omega_2 l \sin\theta]\, dt.$$

Так как на основании закона количества движения $Fdt = dq$, то получим:

$$(p_1 - p_2)\omega_2 - \gamma\omega_2 l \sin\theta = \rho(\beta_2 v_2^2 \omega_2 - \beta_1 v_1^2 \omega_1).$$

Из уравнения неразрывности следует

$$v_1\omega_1 = v_2\omega_2.$$

Подставляя значение $v_1\omega_1$ и $\sin\theta = \frac{z_2 - z_1}{l}$ и сокращая на $\gamma\omega_2$, получим:

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\beta_2 v_2^2 - \beta_1 v_1 v_2}{g}.$$

Подставляя $(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ в уравнение $h_{в.р}$, найдем:

$$h_{в.р} = \frac{\beta_2 v_2^2 - \beta_1 v_1 v_2}{g} + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}. \tag{15-6}$$

Отсюда

$$h_{в.р} = \frac{v_1^2}{2g}\left(2\beta_2 \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 2\beta_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \alpha_1 - \alpha_2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right), \tag{15-7}$$

или

$$h_{в.р} = \frac{v_2^2}{2g}\left(2\beta_2 - 2\beta_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \alpha_1 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - \alpha_2\right). \tag{15-8}$$

Обозначая соответствующие выражения в скобках через ζ_1 и ζ_2, получим:

$$h_{в.р} = \zeta_{в.р1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{в.р2} \frac{v_2^2}{2g}. \tag{15-9}$$

При турбулентном движении обычно считают $\alpha = \beta = 1$. Тогда формула (15-6) обращается в формулу Борда-Карно, имеющую вид

$$h_{в.р} = (\zeta_1 - \zeta_2)\frac{v_2^2}{2g}. \tag{15-10}$$

При таком допущении потеря удельной энергии в турбулентном потоке вследствие внезапного расширения равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости, и в этом случае, как следует из формулы (15-10),

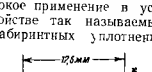
$$\zeta_{в.р1} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2; \tag{15-11}$$

$$\zeta_{в.р2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2. \tag{15-12}$$

На фиг. 15-7 построена диаграмма уравнения Бернулли для участка с внезапным расширением для $\beta = \alpha = 1$.

Фиг. 15-7. Диаграмма уравнений Бернулли для внезапного расширения.

Искусственное создание сопротивлений, обусловленных внезапным расширением, находит широкое применение в устройстве так называемых лабиринтных уплотнений



Фиг. 15-8. Схема лабиринтного уплотнения.

(фиг. 15-8). Например, при кольцевом зазоре 0,43 *мм* расход через кольцевую щель ($d = 105$ *мм*) уменьшается на 16—35% (в зависимости от формы кромок) по сравнению с расходом через ту же щель, но без лабиринта.

15-3. Потеря энергии при выходе потока из трубопровода в большой резервуар

В рассматриваемом случае, являющемся частным видом внезапного расширения, обычно принимается $\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx 0$. Согласно формуле (15-7) будем иметь

$$h_e = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}, \tag{15-13}$$

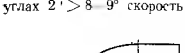
т. е.

$$\zeta_e = \alpha_1.$$

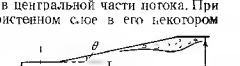
15-4. Потеря энергии при постепенном расширении потока (диффузор)

При протекании жидкости через диффузор (фиг. 15-9 и 15-10) огромное влияние на конфигурацию потока оказывают угол θ и длина диффузора. Наиболее благоприятные условия создаются тогда, когда расширение потока происходит плавно и вся жидкость течет в одном направлении, не отрываясь от стенок. Однако при значительных углах θ ($2\theta > 8 - 9°$), как показывает опыт, в диффузоре появляются обратные течения. Обусловливается это тем, что в диффузоре происходит увеличение давления

в направлении движения, вызываемое уменьшением скорости вследствие расширения. Это увеличение давления оказывает особенно сильное затормаживающее влияние у стенок, где скорость всегда значительно меньше, чем в центральной части потока. При углах $2\theta > 8 - 9°$ скорость в пристенном слое в его некотором



Фиг. 15-9. Постепенное расширение (диффузор).



Фиг. 15-10. Схема потока в диффузоре.

сечении обращается в нуль, а за этим сечением скорость приобретает направление, противоположное главному течению. В подобных случаях распределение скоростей в диффузоре приобретает вид, показанный на фиг. 15-10.

Весьма важной характеристикой потока в диффузоре является так называемый коэффициент диффузорности $\eta_{дифф}$, вычисляемый по формуле

$$\eta_{дифф} = \frac{z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma}}{\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g}}. \tag{15-14}$$

Этот коэффициент определяет способность диффузора преобразовывать по его длине кинетическую энергию в потенциальную.

Потери удельной энергии можно определить из уравнения Бернулли, выразив их через $\eta_{дифф}$, воспользовавшись при этом формулой (15-14), откуда следует, что

$$h_{дифф} = \left(\alpha_1 - \alpha_1 \eta_{дифф} - \alpha_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_2}\right) \frac{v_1^2}{2g}, \tag{15-15}$$

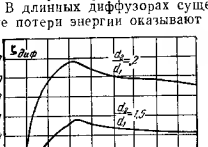
где

$$\zeta_{дифф} = \alpha_1 - \alpha_1 \eta_{дифф} - \alpha_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2}. \tag{15-16}$$

На фиг. 15-11 приведены значения $\zeta_{дифф}$ в зависимости от угла θ и d_1/d_2. Наибольший интерес представляет тот факт, что минимум потерь соответствует почти одному и тому же углу $2\theta = 7 - 9°$ (угол отрыва потока), а максимум, соответствующий углу $2\theta = 65 \div 70°$, превосходит потери, соответствующие внезапному расширению ($2\theta = 180°$). Из последнего

следует, что переходы в виде диффузоров с углом $2\theta > 40 \div 60°$ следует заменять внезапным расширением, как дающим меньшие потери энергии.

В длинных диффузорах существенное влияние на суммарные потери энергии оказывают потери по длине. Их величину ориентировочно можно вычислить по формуле



Фиг. 15-11. Значения коэффициента $\zeta_{диф.п}$ для постепенного расширения (диффузора) в зависимости от угла θ.

$$\int_0^l \lambda \frac{dl}{d} \frac{Q^2}{2g\omega^2} = \frac{\lambda}{8\,\mathrm{tg}\,\theta}\left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right)\frac{v_1^2}{2g}, \tag{15-17}$$

где v_1 — средняя скорость потока в сечении с диаметром d_1,

$$dl = \frac{d\,(d)}{2\,\mathrm{tg}\,\theta};$$

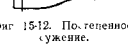
λ — коэффициент сопротивления трения по длине, принимаемый за постоянный и вычисляемый по среднему диаметру.

Из (15-17) следует, что коэффициент сопротивления, соответствующий потерям только по длине, равен:

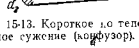
$$\zeta_{диф.дл} = \frac{\lambda}{8\,\mathrm{tg}\,\theta}\left(1 - \frac{d^4}{d_2^4}\right). \tag{15-18}$$

15-5. Потеря энергии при постепенном сужении потока (конфузор)

При коротком хорошем закруглении (см. фиг. 20-14) или коническом сужении (фиг. 15-12) ($l/d \approx 3$) потери энергии прак-



Фиг. 15-12. Постепенное сужение.



Фиг. 15-13. Короткое постепенное сужение (конфузор).

тически могут считаться равными нулю. Коэффициент местного сопротивления, отнесенный к скорости v_2, имеет значение:

$$\zeta_{пс} = 0{,}06 \div 0{,}005. \tag{15-19}$$

В том случае, если переход достаточно длинный (фиг. 15-13), коэффициент сопротивления, отнесенный также к скорости v_1, можно определять по формуле, аналогичной формуле для диффузора (15-18).

15-6. Потеря энергии при внезапном сужении потока

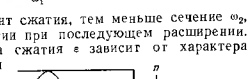
При внезапном сужении трубы (фиг. 15-14) живое сечение струи благодаря острой входной кромке сперва уменьшается до значения ω_2, меньшего, чем ω_1, после чего расширяется до сечения ω_1.

Потери энергии складываются из потерь на сжатие, которое можно рассматривать как главное, и потерь на последующее расширение. Величина общего коэффициента $\zeta_{вс} = \zeta_c + \zeta_{рас}$ зависит главным образом от степени сжатия струи в сечении mn, которое характеризуется коэффициентом сжатия струи ε, равным отношению площади сжатого сечения струи ω_2 к площади ω_1:

$$\varepsilon = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Чем меньше коэффициент сжатия, тем меньше сечение ω_2, тем больше теряется энергии при последующем расширении.

Величина коэффициента сжатия ε зависит от характера сжатия и от формы кромки входного отверстия в сечении bc. Если $\omega_3 > 10\omega_1$, можно пренебречь влиянием на сжатие близости стенок широкой трубы. В этом случае сжатие можно называть совершенным.



Фиг. 15-14. Внезапное сужение.

Значения общего коэффициента сопротивления для турбулентного движения приведены в табл. 15-2. Заметим, что значение $\zeta = 0{,}5$ можно рассматривать как значение коэффициента потерь при входе в трубу с острой входной кромкой из большого резервуара.

Таблица 15-2

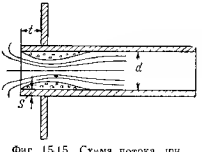
Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{вс}$ при внезапном сужении

ω_1/ω_2	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\zeta_{вс}$	0,5	0,47	0,45	0,38	0,34	0,3	0,25	0,2	0,15	0,09	0

15-7. Потеря энергии при входе в трубу

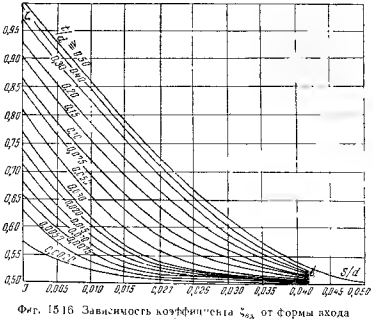
Всякий вход в трубопровод может рассматриваться как сужение, причем в зависимости от формы присоединения трубопровода сужение может быть постепенное или внезапное. Значение

коэффициента сопротивления $\zeta_{вх}$ для входа в трубу будет зависеть от формы входа. На фиг. 15-15 показана схема потока жидкости на входном участке. Уменьшая или даже устраняя сужение струи при входе в трубу, можно значительно уменьшить коэффициент сопротивления. Следует иметь в виду, что вход в трубопровод является очень ответственным элементом в трубопроводной коммуникации и на его устройство должно быть обращено серьезное внимание.



Фиг. 15-15. Схема потока при входе в трубопровод

В местах сужения струи благодаря увеличению скорости в отдельных случаях могут создаться малые давления, иногда разрежения, соответствующие кавитационным условиям. Местом



Фиг. 15-16. Зависимость коэффициента $\zeta_{вх}$ от формы входа в трубопровод.

наименьшего давления при входе является наиболее сжатое сечение струи. Значения коэффициента сопротивления при входе относят к скорости в присоединенной трубе в том сечении, в котором живое сечение струи равно площади поперечного сечения трубопровода.

Значения $\zeta_{вх}$ для турбулентного движения в зависимости от отношений t/d и S/d приведены на фиг. 15-16 по данным ЦАГИ имени проф. Н. Е. Жуковского.

Для косоугольного входа (фиг. 15-17) значения $\zeta_{вх}$ определяются по формуле

$$\zeta_{вх} = 0{,}5 + 0{,}3\cos\theta + 0{,}2\cos 2\theta \quad (15\text{-}20)$$

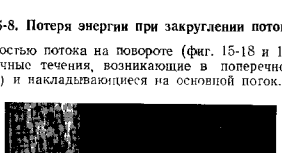
Фиг. 15-17. Схема потока в косоугольном входном участке трубопровода

Коэффициент ζ для входа при ламинарном движении изучен недостаточно. Согласно некоторым исследованиям и при ламинарном движении при входе жидкости в трубу происходит сжатие струи, причем коэффициент сжатия в среднем можно принять равным $\varepsilon = 0{,}74$. Принимая для входного участка в формуле (15-8) значения $\alpha = \varphi = 1$, можно воспользоваться формулой (15-11) и получить:

$$\zeta_{вх} = 0{,}125.$$

15-8. Потеря энергии при закруглении потока

Особенностью потока на повороте (фиг. 15-18 и 15-19) являются вторичные течения, возникающие в поперечном сечении (фиг. 15-20) и накладывающиеся на основной поток. Вторичные

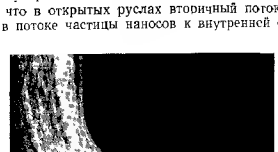


Фиг. 15-18. Поток жидкости на закруглении.

течения возникают в результате того, что ядро потока, движущееся с большей скоростью, чем пристенные слои, подчиняясь закону инерции, стремится на закруглении продолжать двигаться прямолинейно, благодаря чему оттесняет движущуюся медленнее пристенную часть потока, в результате чего и возникает показанный на фигуре вторичный поток. Возникающая при этом перав-

номерность давления способствует также образованию поверхностей раздела, что видно на фиг. 15-18 и 15-19[1]. Вторичные потоки возникают как в ламинарном, так и в турбулентном потоке. На фиг. 15-20 показаны линии тока вторичного потока при ламинарном движении, соответствующие одинаковым расходам между каждой парой линий[2].

Заметим, что в открытых руслах вторичный поток переносит взвешенные в потоке частицы наносов к внутренней стороне из-



Фиг. 15-19. Поток жидкости на закруглении.

лучины и способствует этим большему разрушению наружной стороны и обмелению внутренней.

Возникающий вторичный поток, а также зона отрыва потока от стенок являются источниками дополнительного гидравлического сопротивления. Экспериментально коэффициент потерь $\zeta_з$ исследован удовлетворительно только для гладкой поверхности.

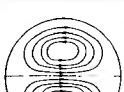
Наибольшее распространение для закруглений круглого сечения (фиг. 15-21) получила формула Вейсбаха:

$$\zeta_з = \left[0{,}31 + 0{,}16\left(\frac{d}{r}\right)^{3,5}\right]\frac{\theta^\circ}{90^\circ}, \qquad (15\text{-}21)$$

причем $d \leqslant 2r \leqslant 5d$ (здесь d — диаметр трубы; r — радиус закругления, а θ — угол закругления).

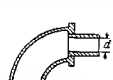
[1] На повороте давление по сечению возрастает в направлении от центра кривизны линий тока. Это вызывает соответствующее уменьшение скорости на дальних от центра линиях, способствующее отрыву потока от стенки.

[2] П. А. Вальтер, Труды гидроэнергетического научно-исследовательского института, ГЭИ, 1933, вып. 5.



Фиг. 15-20. Вторичное движение в потоке на закруглении.

Фиг. 15-21. Фланцевое закругление.



Фиг. 15-22. Муфтовое закругление.

Для $\frac{d}{r} < 1$ формула Вейсбаха дает хорошее совпадение с опытными данными Г. Н. Абрамовича, которым для $\theta = 90^\circ$ предложена формула в виде:

$$\zeta_{зА} = 0{,}73f\left(\frac{r}{d}\right). \qquad (15\text{-}22)$$

Значения $\zeta_з$, вычисленные для $\theta = 90^\circ$ по формулам (15-21) и (15-22), приведены в табл. 15-3.

В табл. 15-4 приведены значения d/r для чугунных водопроводных труб, вычисленные по данным ОСТ НКТП 2523.

Таблица 15-3

Значения коэффициента сопротивления ζ в закруглении с углом $\theta = 90^\circ$

d/r	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\zeta_з$	—	0,14	0,15	0,16	0,18	0,21	0,24	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98
$\zeta_{зА}$	0,067	0,13	0,15	0,175	0,19	0,20	0,21	0,23					

Таблица 15-4

Значения d/r чугунных водопроводных труб

d, мм	50	75	100	125	150	200	250	300	400	500
d/r	0,49	0,59	0,61	0,65	0,7	0,75	0,94	1,13	1,13	1,1

При определении коэффициента $\zeta_з$ следует иметь в виду, что на практике часто применяются угольники (фиг. 15-22), представляющие в сочетании с трубопроводом сложное местное сопротивление, дающее коэффициент $\zeta_з$, значительно больший, чем это получается по приведенным выше данным. Так,

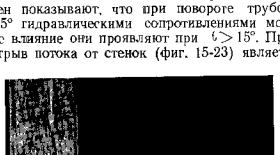
например, автором был исследован угольник для водопроводных труб (фиг. 15-22) $d = 26$ *мм*, коэффициент сопротивления которого оказался равным:

а) при установке угольника на конце трубопровода при $Re = 193\,000 - 246\,000$: $\zeta = 2{,}84 - 2{,}76$,

б) при установке угольника в середине трубопровода при $Re = 34\,000 - 100\,000$: $\zeta = 0{,}918$.

15-9. Потеря энергии при повороте потока в колене

Экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений колен показывают, что при повороте трубопровода на угол $\theta < 15°$ гидравлическими сопротивлениями можно пренебречь. Свое влияние они проявляют при $\theta > 15°$. Происходящий в колене отрыв потока от стенок (фиг. 15-23) является источни-



Фиг. 15-23. Поток в колене.

ком дополнительных потерь энергии. Аналитическое исследование потерь энергии в колене принципиально не отличается от рассмотренного в § 15-2 применительно к случаю внезапного расширения потока. В обоих случаях исходными уравнениями являются уравнения Д. Бернулли и количества движения. Однако в отличие от первого случая для колена расчетной формулой является [1]:

$$h_к = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \qquad (15\text{-}23)$$

где $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ — векторная разность скоростей, а коэффициенты α и β при выводе формулы приняты равными единице. Таким

[1] Н. З. Френкель, Гидравлика, Госэнергоиздат, 1947, § 100.

образом, теоретически потеря удельной энергии равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости.

Для колен постоянного сечения ($v_1 = v_2$) эта формула принимает вид:

$$h_к = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{v^2}{2g}, \qquad (15\text{-}24)$$

откуда

$$\zeta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \qquad (15\text{-}25)$$

где θ — угол поворота потока в колене.

На основании устаревших опытных данных Вейсбаха в эту формулу следует ввести поправочный множитель

$$k = 0{,}25 + 0{,}5 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \qquad (15\text{-}26)$$

что, однако, для применяющихся в технике колен дает заниженное значение коэффициента сопротивления. Для таких колен и для углов $\theta = 15 - 80°$ коэффициент k следует вычислять по формуле, предлагаемой автором:

$$k = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \qquad (15\text{-}27)$$

что дает для ζ формулу в виде:

$$\zeta = \sin^2 \theta. \qquad (15\text{-}28)$$

15-10. Потеря энергии в ответвлениях

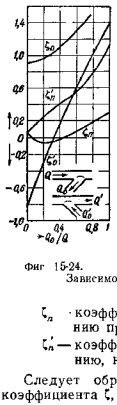
Величина потерь в ответвлениях как в направлении главной магистрали, так и в направлении ответвления будет зависеть от геометрической формы ответвления, от соотношения диаметров разветвляющихся трубопроводов, а также от направления течения и от соотношения количеств жидкости, идущих по магистрали и по ответвлениям.

Значения коэффициентов потерь при турбулентном движении приведены на графике (фиг. 15-24—15-26). Значения всех коэффициентов отнесены к скоростному напору, соответствующему суммарному расходу Q до ответвления при разделении потоков или суммарному расходу Q' при их слиянии. На каждом из графиков обозначения имеют следующее значение:

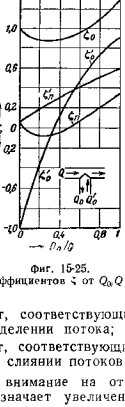
Q_0 и Q'_0 — расход в ответвлении при разделении и слиянии;

ζ_0 — коэффициент, соответствующий ответвлению при разделении потока,

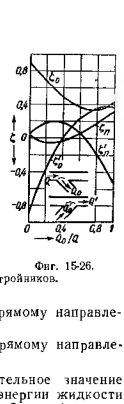
ζ'_0 — коэффициент, соответствующий ответвлению, но при слиянии потоков,



Фиг 15-24.



Фиг. 15-25.



Фиг. 15-26.

Зависимость коэффициентов ζ от Q_0/Q для тройников.

ζ_n — коэффициент, соответствующий прямому направлению при разделении потока;

ζ_n' — коэффициент, соответствующий прямому направлению, но при слиянии потоков.

Следует обратить внимание на отрицательное значение коэффициента ζ, что означает увеличение энергии жидкости в соответствующем направлении течения. Это обусловливается всасывающим действием сходящихся или расходящихся потоков жидкости.

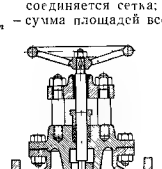
15-11. Коэффициенты сопротивлений ζ запорных приспособлений, клапанов и других устройств

О факторах, влияющих на значение коэффициента ζ, было сказано в § 15-1. Здесь будут приведены некоторые значения ζ: в табл. 15-5 для запорных устройств (фиг. 15 27—15 31), в табл 15-6 приближенные значения для сетки с обратным клапаном (фиг. 15 32), устанавливаемой на приемных концах трубопроводов (водопроводных линий, насосных установок и т. п). Если всасывающая коробка не снабжена обратным клапаном, коэффициент сопротивления коробки (сетки) можно определять по формуле

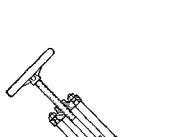
$$\zeta_{сет} = (0{,}675 + 1{,}575)\left(\frac{\omega}{\omega_{сет}}\right)^2, \qquad (15\text{-}29)$$

где ω — площадь поперечного сечения трубы, к которой присоединяется сетка;

$\omega_{сет}$ — сумма площадей всех отверстий сетки



Фиг. 15-27. Вентиль обыкновенный.



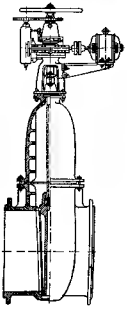
Фиг 15-28. Вентиль с косым затвором

Таблица 15-5

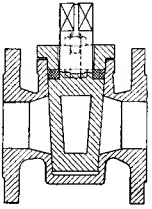
Значения коэффициентов сопротивления ζ вентилей и задвижек при полном открытии

Наименование	Диаметр, дюймы	Расчетный диаметр, мм	Коэффициент сопротивления ζ	Расчетный диаметр, мм	Коэффициент сопротивления ζ
Вентиль запорный обыкновенный муфтовый № 3	1	27	12,10	25,4	9,50
То же № 4	1	27	8,87	25,4	6,95
„ „ № 5	1	27	8,87	25,4	6,95
Вентиль запорный обыкновенный муфтовый № 1	$1^1/_2$	41	7,26	38,1	5,40
То же № 2	$1^1/_2$	41	6,78	38,1	5,03
Вентиль запорный обыкновенный муфтовый	2	53	7	50,8	5,95
Вентиль запорный фланцевого типа с косым затвором № 6	$1^1/_2$	41	1,35	38,1	1,00
То же	3	75	0,614	76,2	0,604
Задвижка	4	106	0,117	101,6	0,107
Пробочный кран	2	53	0,1	50,8	0,85

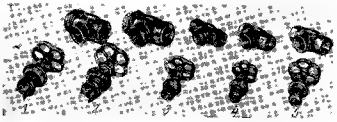
В табл. 15-7 приведены коэффициенты сопротивления для различных форм клапанов.



Фиг. 15-29. Задвижка

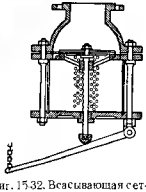


Фиг. 15-30. Пробочный кран.



Фиг 15-31. Вентили.

1 и *2* — вентиль обыкновенный бронзовый диаметром 1/2" с тарельчатым клапаном и нижним направлением; *3*, *4* и *5* — вентиль обыкновенный муфтовый для бронзы диаметром 3/4" с тарельчатым клапаном без нижнего направления; *6* — вентиль фланцевый чугунный с косым затвором диаметром 1 1/2—3"



Фиг. 15-32. Всасывающая сетка с обратным клапаном.

Таблица 15-6

Значения коэффициента сопротивления ζ всасывающей коробки с обратным клапаном

d, м	0,04	0,07	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75
ζ	12	8,5	7	6	5,2	3,7	2,5	1,6

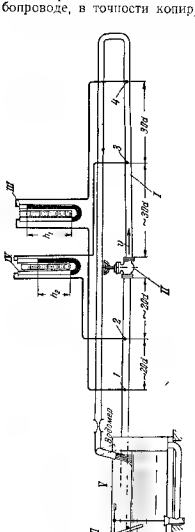
Таблица 15-7

Значения коэффициентов сопротивления ζ клапанов (по Баху)

Тип клапана	Значения коэффициентов
Тарельчатый клапан без нижнего направления (фиг 15-33)	$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{d}{h}\right)^2$, $4 < d:h < 10$; $4b < d < 10b$; $\alpha = 0{,}55 + 4(b - 0{,}1 \cdot d):d$, $\beta = 0{,}16 \div 0{,}15$
Тарельчатый клапан с нижним направлением (фиг 15-34)	$\zeta = \alpha + \beta \cdot [d^2 \cdot (\pi \cdot d - i \cdot s) \cdot h]^2$, $4 < d:h < 8$, где i — число ребер, s — ширина ребра; $\alpha = (0{,}8$ до $1{,}6) \cdot (0{,}55 + 4(b - 0{,}1 \cdot d) \cdot d]$ в зависимости от степени стеснения ребрами площади прохода от 0,87 до 0,8м, $\beta = 1{,}7$ до $1{,}75$
Конусный клапан с плоской нижней поверхностью (фиг. 15-35)	$\zeta = 2{,}6 - 0{,}8(d:h) + 0{,}14(d:h)^2$; $4 < d:h < 10$, $10b - d$
Конусный клапан с конусообразной опорной поверхностью (фиг. 15-36)	$\zeta = 0{,}6 + 0{,}15 \cdot (d:h)^2$, $2{,}5 < d:h < 8$
Шаровой клапан с выпуклой опорной поверхностью (фиг 15-37)	$\zeta = 2{,}7 - 0{,}8(d:h) + 0{,}14(d:h)^2$, $4 < d:h < 10$

15-12. Экспериментальное определение коэффициента местных сопротивлений

Наиболее точным способом исследования коэффициентов местного сопротивления является исследование их на модельном трубопроводе, в точности копирующем тот, на котором это местное сопротивление будет установлено.



Фиг. 15-38. Схема экспериментальной установки для определения коэффициента местных сопротивлений.

В этом случае сначала определяются потери удельной энергии модельного трубопровода без местного сопротивления, а затем потери удельной энергии в том же трубопроводе, но с местным сопротивлением. Потери энергии, вызванные местным сопротивлением, находят как разность потерь энергии в обоих случаях.

Весьма часто местные сопротивления исследуются без уточнения их месторасположения в будущем.

В этом случае лучшим способом является также метод модельного трубопровода, однако модель представляет прямой трубопровод достаточной длины, в центре которого смонтировано исследуемое местное сопротивление. Так же как и в предыдущем случае потери удельной энергии определяют как разность потерь удельной энергии в трубопроводе с местным сопротивлением и только в трубопроводе (без местного сопротивления). Для того чтобы избавиться от предварительного определения сопротивления самого трубопровода, исследование может быть осуществлено методом двух дифференциальных ма-

нометров (или четырех пьезометров), как показано на фиг. 15-38. Здесь *I* — труба; *II* — испытываемое местное сопротивление; *III* и *IV* — два дифференциальных ртутных манометра, *V* — мерный бак; *VI* — термометр. Манометры должны быть присоединены в таких сечениях трубопровода, где распределение скоростей по живым сечениям потока можно считать одинаковым ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$). Для того чтобы на одной и той же установке можно было производить исследование различных местных сопротивлений, длины отдельных участков опытного трубопровода следует брать побольше. Размеры, показанные на фиг. 15-38, обеспечивают достаточную точность исследования.

При соблюдении поставленных выше условий дифференциальный манометр *III* позволяет определить значение

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_4 + \frac{p_4}{\gamma}\right) = h_1\left(\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}\right),$$

равное сумме потерь удельной энергии по длине на участке *1—4* и в местном сопротивлении

$$h_1\left(\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}\right) = h_д + h_м.$$

Дифференциальный манометр *IV* позволяет определить значение

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\gamma}\right) = h_2\left(\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}\right),$$

равное сумме потерь удельной энергии по длине на участке, вдвое меньшем предыдущего, и в том же местном сопротивлении:

$$h_2\left(\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}\right) = 0{,}5h_д + h_м.$$

Таким образом, для определения $h_м$ имеются два уравнения, откуда находим:

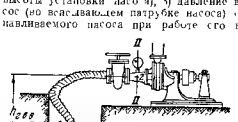
$$h_м = (2h_2 - h_1)\left(\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}\right). \qquad (15\text{-}30)$$

Зная на основании предыдущего, что $h_м = \zeta_м \frac{v^2}{2g}$, можно найти и коэффициент сопротивления $\zeta_м$ по формуле

$$\zeta_м = \frac{h_м}{v^2/2g} = \frac{2g}{v^2}(2h_2 - h_1)\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}. \qquad (15\text{-}31)$$

Задача 15-1. Определить геометрическую высоту h установки оси центробежного насоса (фиг. 15-39) над уровнем жидкости в емкости, откуда насос ее забирает (эта высота называется геометрической высотой всасывания насоса $h_{г.в.в}$) согласно следующим данным 1) насос будет перека

чивать воду в количестве Q ,0 *л/сек*, 2) всасывающий трубопровод выполнен в виде гибкого шланга, длиной l ,0 *м* и диаметром d 75 *мм* (длина всасывающего трубопровода в данном расчете не будет зависеть от высоты установки насоса), 3) давление в жидкости перед входом ее в насос (по всасывающем патрубке насоса) согласно паспортным данным устанавливаемого насоса при работе его на воде с температурой t 20° С должно быть не меньше



Фиг. 15.39 Схема насосной установки со всасывающим трубопроводом в виде шланга. К задаче 15.1

$$p_{вс} = 4\,000\ кГ/м^2;$$

4) территория насосной станции расположена на высоте 250 *м* над уровнем моря (место нахождения территории требуется знать для уточнения значения, соответствующего данному месту атмосферного давления), 5) кинематический коэффициент вязкости воды при t 20° С

$$\nu = 0{,}01\ см^2/сек.$$

Решение. Особенностью данной задачи является то, что в присоединенном к центробежному насосу трубопроводе движение жидкости может рассматриваться установившимся. На этом основании для ее решения применим уравнение Бернулли для установившегося потока реальной жидкости.

Приняв за плоскость сравнения горизонтальную поверхность воды в водоеме, напишем уравнение Бернулли для сечений *I* и *II*.

Второе сечение есть живое сечение потока во всасывающем патрубке насоса

Принимаем для некоторого упрощения, что диаметр всасывающего трубопровода (шланга) $d_ш$ и диаметр всасывающего патрубка насоса равны (это не всегда имеет место и во многих случаях обязательно должно быть учтено) При таком допущении скорости в трубопроводе и в патрубке будут одинаковы, а уравнение Бернулли может быть представлено в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g\omega_1^2} - z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \left(\alpha_2 + \lambda\frac{l}{d} + \zeta_{кл} + \zeta_{зад}\right)\frac{Q^2}{2g\omega_ш^2}.$$

Вследствие того, что площадь ω_1 зеркала свободной поверхности велика почти всегда можно принять значение

$$\frac{\alpha_1 Q^2}{2g\omega_1^2} = 0.$$

Учитывая, что в данном случае $z_2 = h_{г.в.в}$, и решая уравнение Бернулли относительно $h_{г.в.в}$, найдем:

$$h_{г.в.в} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - \left(\alpha_2 + \lambda\frac{l}{d} + \zeta_{кл} + \zeta_{зад}\right)\frac{Q^2}{2g\omega_ш^2}.$$

Для определения коэффициентов α_1, λ и ζ определим число *Re*:

$$Re = \frac{Q}{0{,}785 d\nu} = \frac{10\,000}{0{,}785 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}01} = 169\,350.$$

Движение турбулентное.

Принимаем

$$\alpha_2 = 1{,}1,$$
$$\zeta_{кл} = 8{,}5,$$
$$\zeta_{зад} = 0{,}12$$

Коэффициент λ для гибкого шланга диаметром равным 75 *мм* согласно фиг 14-1 принимаем равным 0,07

Значение

$$2g\omega_ш^2 = 38{,}29\ дм^5/сек^2.$$

Подставляя найденные значения в формулы для $h_{г.в.в}$, найдем:

$$h_{г.в.в} = \frac{100 - 40}{1} - \left(1{,}1 + 0{,}07\frac{100}{0{,}75} + 8{,}5 + 0{,}12\right)\frac{10^2}{38{,}29} = 10\ дм.$$

Задача 15-2. Определить геометрическую высоту всасывания центробежного насоса (фиг. 15-40) согласно следующим данным

1) насос будет перекачивать бензин в количестве $Q = 10$ *л/сек*,

2) расстояние по горизонтали места установки насоса от бензохранилища $l_г = 25$ *м*;

3) диаметр металлических трубопроводов всасывающей линии $d = 50$ *мм*, шероховатость трубопровода $\Delta = 0{,}4$ *мм*, шероховатость принята с запасом на случай старения трубопровода;

4) всасывающий конец трубопровода заполнен в жидкость на длину $l_в = 1$ *м*,

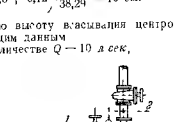
5) территория насосной станции расположена на высоте 1 250 *м* над уровнем моря,

6) давление в жидкости (бензин) перед входом ее в насос (во всасывающем патрубке насоса) $p_1 = p_{вс}$ согласно паспортным данным устанавливаемого насоса при работе его на данном сорте бензина должно быть не меньше $p_{вс} = 6\,000$ *кГ/м²*,

7) объемный вес бензина $\gamma = 730$ *кГ/м³*;

8) кинематический коэффициент вязкости

$$\nu = 0{,}008\ см^2/сек$$



Фиг. 15-40. Схема насосной установки с металлическим всасывающим трубопроводом. К задаче 15 2

Решение. Отличие данной задачи от предыдущей заключается лишь в том, что общая длина трубопровода, слагающаяся из

$$l = l_г + h_{г.в.в} + l_в,$$

является неизвестной, так как неизвестна величина, $h_{г.в.в}$, подлежащая определению.

Метод решения задачи в основном остается тем же Несколько изменяются лишь математические преобразования.

Напишем нашему уравнение Бернулли для сечения *a a* и *I I* Оно будет иметь следующий вид

$$\frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_{вс}}{\gamma} + h_{г.в.в} + \frac{\alpha_{вс} Q^2}{2g\omega_{вс\ пат}^2} + \left(\lambda\frac{l_г + l_в}{d} + \zeta_{кл} + \zeta_{зад}\right) \times$$
$$\times \frac{Q^2}{2g\omega_{вс\ тр}^2} + \lambda\frac{h_{г.в.в} Q^2}{d 2g\omega_{вс\ тр}^2}.$$

Принимаем, как и в предыдущем случае, площадь сечения патрубка насоса и всасывающего трубопровода одинаковыми.

Решая это уравнение относительно $h_{г.в.в}$, получим

$$h_{г.в.в} = \frac{\frac{p_1 - p_{ac}}{\gamma} - \left(\alpha_{ac} + \lambda\frac{l_г + l_э}{d} + \zeta_{кл} + \zeta_{заб}\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2_{ac\,тр}}}{1 + \lambda\frac{Q^2}{d\,2g\omega^2_{ac\,тр}}}$$

Для определения значений α, λ и ζ необходимо вычислить число Re

$$Re = \frac{Q}{0{,}785 d\nu} = \frac{10\,000}{0{,}785 \cdot 10 \cdot 0{,}008} = 159\,235,$$

движение турбулентное.

Принимаем:

$$\alpha = 1{,}1;$$
$$\zeta_{кл} = 7.$$
$$\zeta_{заб} = 0{,}12.$$

Коэффициент λ вычисляем по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\frac{\Delta}{3{,}7d} + \left(\frac{6{,}81}{Re}\right)^{0{,}9}\right] = -2\lg\left[\frac{0{,}4}{3{,}7 \cdot 100} + \left(\frac{6{,}81}{159\,235}\right)^{0{,}9}\right],$$

откуда

$$\lambda = 0{,}0244;$$
$$2g\omega^2 = 121\ дм^2/сек^2.$$

Подставляя, находим:

$$h_{г.в.в} = \frac{\frac{100 - 60}{0{,}75} - \left(1{,}1 + \frac{260}{1{,}0} \cdot 0{,}0244 + 7{,}0 + 0{,}12\right)\cdot\frac{100}{121}}{1 + \frac{0{,}0244}{1{,}0}\cdot\frac{100}{121}} = 44{,}95\ дм.$$

Задача 15-3. Определить расход воды через масляный холодильник.

Вода поступает в распределительную крышку холодильника через диффузор. Далее она проходит через систему трубок, охлаждая при этом масло. Температура холодной воды $t = 20°$ С. Кинематический коэффициент вязкости при этом $\nu = 0{,}01\ см^2/сек$. Средняя температура нагретой воды $t = 60°$ С. Кинематический коэффициент вязкости при этом $\nu = 0{,}0049\ см^2/сек$.

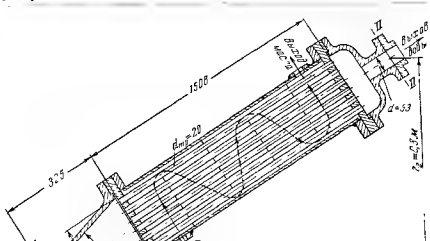
Избыточное давление жидкости при входе в диффузор

$$\frac{p_{a1}}{\gamma} = 6\ м\ вод.\ ст.$$

Избыточное давление жидкости при выходе

$$\frac{p_{a2}}{\gamma} = 2{,}5\ м\ вод.\ ст.$$

Число охлаждающих трубок $n = 30$; диаметр трубки $d = 20$ *мм*. Все остальные размеры показаны на фиг. 15.41.



Фиг. 15.41. Схема холодильника. К задаче 15-3.

Для определения расхода применим уравнение Бернулли для потока реальной жидкости. Выбрав за плоскость сравнения горизонтальную плоскость, проходящую через центр тяжести поперечного сечения трубы на входе в холодильник (центр сечения $I-I$), напишем уравнение Бернулли для сечений $I-I$ и $II-II$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g\omega_1^2} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 Q^2}{2g\omega_2^2} + h_w,$$

где

$$z_1 = 0;\quad z_2 = 0{,}8\ м;\quad \frac{p_1}{\gamma} = 6\ м\ вод.\ ст.;\quad \frac{p_2}{\gamma} = 2{,}5\ м\ вод.\ ст.$$

Перейдем к определению коэффициентов гидравлических сопротивлений. Ввиду того, что расход через систему неизвестен, не представляется возможным определить число Re на отдельных участках. Поэтому такие расчеты надо начинать с предварительных, что проще всего делать, предполагая режим движения везде соответствующим квадратичной зоне. Позже расчет надо будет уточнить.

Предварительного расчета здесь не дается. Результаты его, касающиеся значения Re, несколько откорректированные, приведены в таблице

Сечение	$I-I$	Широкое сечение диффузора	Охлаждающие трубки
Re	350 000	67 000	63 500

Теперь вычислим коэффициенты гидравлических сопротивлений.

1) Коэффициент сопротивления диффузора найдем ориентировочно по графику (фиг. 15-11) для $d_2/d_1 = 5{,}19$. Для $2\beta = 30°$ $\zeta_{диф} = 0{,}55$.

2) Коэффициент сопротивления при входе в охлаждающие трубки

$$\zeta'_{вх} = 0{,}5.$$

3) Коэффициент λ для охлаждающих трубок. Трубки медные, гладкие

$$\lambda = \frac{1}{(1{,}8 \lg Re - 1{,}5)^2} = \frac{1}{(1{,}8 \cdot 4{,}8 - 1{,}5)^2} = 0{,}0193.$$

4) Коэффициент $\zeta_в = 1{,}1$ при выходе из охлаждающей трубки

5) Коэффициент $\zeta''_{вх} = 0{,}5$ при входе в отвод.

Подставляя эти значения в уравнение Бернулли, найдем

$$\frac{p_{a1}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g\omega_1^2} = z_2 + \frac{p_{a2}}{\gamma} + \frac{\alpha_2 Q^2}{2g\omega_2^2} + \zeta_{диф}\frac{Q^2}{2g\omega_1^2} + \zeta'_{вх}\frac{Q^2}{n^2 2g\omega_{тр}^2} +$$
$$+ \lambda \cdot \frac{l}{d}\cdot\frac{Q^2}{n^2 2g\omega_{тр}^2} + \zeta_в \cdot \frac{Q^2}{2g(\omega_{тр} n)^2} + \zeta''_{вх}\cdot\frac{Q^2}{2g\omega_2^2}.$$

Разрешим это уравнение относительно Q (имея в виду, что $\omega_1 = \omega_2$)

$$Q = \omega_1 \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_{a1} - p_{a2}}{\gamma} - z_2\right)}{\zeta_{диф} + \zeta'_{вх} + \left(\zeta'_{вх} + \lambda\frac{l}{d} + \zeta_в\right)\left(\frac{\omega_1}{n\omega_{тр}}\right)^2}}.$$

Подставляя цифры, получим

$$Q = 0{,}22\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81(60 - 25{,}0 - 8)}{0{,}55 + 0{,}50 + \left(0{,}5 + 0{,}0196 \cdot \frac{1\,500}{20} + 1{,}1\right)0{,}0548}} = 14{,}5\ л/сек.$$

Легко проверить соответствие принятых Re условиям течения жидкости через охладитель.

Задача 15-4. Определить расход бензина через жиклер капилляр карбюратора, диаметр отверстия которого $d = 1$ *мм*, а отношение длины капилляра l к d: $\frac{l}{d} = 10$. Потери учесть только в капилляре (при входе и по длине).

Бензин поступает в жиклер из поплавковой камеры по трубкам, изображенным на схеме (фиг. 15-42), благодаря вакууму, создающемуся в устье жиклера A в диффузоре карбюратора.

Разность уровней бензина в поплавковой камере и в устье жиклера $h = 3$ *мм* (в дальнейшем пренебрегаем).

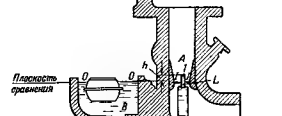
Поплавковая камера сообщается с атмосферой, благодаря чему давление на поверхности бензина в поплавковой камере равно атмосферному.

Расчет необходимо произвести для вакуума в диффузоре карбюратора возле устья жиклера, равного 1 450 *мм* бензин. водн. столба.

Объемный вес бензина $\gamma = 750$ *кГ/м*^{3}; кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0{,}08$ *см*^{2}/*сек*.

Решение. Так как жидкость вытекает из достаточно длинной цилиндрической трубки и при вытекании никакого внешнего сжатия не претерпевает, то площадь живого сечения струи $\omega_{струи}$ на выходе равна площади сечения жиклера $\omega_{жиклер}$.

Если бы жидкость вытекала из весьма короткой цилиндрической трубы (например $l/d < 1{,}5 - 2$), могло бы иметь место такое явление, при котором струя благодаря сужению своего сечения продолжала трубку и не касалась бы ее стенок. Подобный случай истечения будет рассмотрен в гл. 20 при изучении истечения жидкости из отверстий. Поэтому для вычислений расхода γQ *кГ/сек* мы можем исходить из формулы



Фиг. 15-42. Схема элементарного карбюратора. К задаче 15-4.

$$G = \gamma v \omega,$$

где γ — объемный вес бензина;

ω — площадь поперечного сечения отверстия жиклера;

v — действительная скорость истечения бензина из отверстия жиклера.

Для определения скорости v применим уравнение Бернулли для потока реальной жидкости. Выбрав за плоскость сравнения горизонтальную свободную поверхность бензина в поплавковой камере, напишем уравнение Бернулли для сечения 0—0, совпадающего с плоскостью сравнения, и сечения 1—1, совпадающего с отверстием жиклера. Тогда, обозначая $v_1 = v$, имеем

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \zeta\frac{v^2}{2g} + \lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g};$$

принимая скорость на поверхности в поплавковой камере $v_0 = 0$, из уравнения Бернулли для скорости v получим следующее выражение.

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_0 - p_1}{\gamma} - h\right)}{\alpha_1 + \lambda\frac{l}{d} + \zeta}},$$

назвав коэффициентом скорости

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \lambda\frac{l}{d} + \zeta}},$$

получим

$$v = \varphi\sqrt{2g\left(\frac{p_0 - p_1}{\gamma} - h\right)} = \varphi\sqrt{2gH},$$

где $H = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} - h$ — напор истечения.

Как видим, коэффициент скорости φ зависит от l/d, а также от λ и ζ, которые в свою очередь зависят от режима движения, т. е. от Re. Поэтому для определения значения φ, которое соответствует заданному напору истечения H, нам следует сначала установить зависимость φ от Re и l/d, т. е. $\varphi = f(Re, l/d)$. Для этого зададимся несколькими значениями Re. При заданной вязкости это будет равносильно тому, что мы зададимся рядом значений средней ско-

рости v. Зная Re или v, легко вычислить и соответствующие значения коэффициента скорости φ и найти им соответствующее

$$H = \frac{v^2}{2g\varphi^2}.$$

Таким образом, мы будем иметь в конечном счете зависимость

$$\varphi = f(H),$$

которую полезно изобразить графически, что позволит получить значение коэффициента скорости φ, отвечающее любому H. При вычислении α и λ для ламинарного движения необходимо исходить из теории начального участка. В турбулентном движении $\alpha = 1{,}1$, а для гладких труб $\lambda = (1{,}8 \lg Re - {,}5)^{-2}$.

Результаты выкладок занесем в таблицу

Re	v, см/сек	$l/d \cdot Re$	ε	A	λ	ζ	φ	H, см
1 000	80	0,0100	1,717	88	0,088	0,125	0,605	8,91
1 500	120	0,0666	1,610	100	0,066	0,125	0,646	17,58
2 320	185	0,0431	1,510	110	0,0474	0,125	0,688	35,79
2 320	185	—	1,1	—	0,0481	0,3	0,729	32,81
3 000	240	—	1,1	-	0,0441	0,3	0,737	54,05
5 000	400	—	1,1		0,0356	0,3	0,751	144,83
8 000	640	—	1,1		0,0328	0,3	0,761	360,75

Из таблицы (а если построен график, то из графика) следует, что за данному напору $H = 145$ *см* соответствует $\varphi = 0{,}751$, и движение турбулентное, так как $Re = 5\,000$. Подставляя, имеем:

$$v = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}751\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 145} = 400 \text{ см/сек},$$

$$Q = \tau\omega = 400 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 = 3{,}14 \text{ см}^3/\text{сек},$$

$$G = \gamma Q = 0{,}75 \cdot 3{,}14 = 2{,}36 \text{ Г/сек}.$$

Глава шестнадцатая

ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАСХОДОВ ЖИДКОСТИ

В этой главе будут изложены главным образом теоретические основы дроссельных расходомерных приборов, позволяющих весьма просто определять расходы в установившихся потоках и потому получивших широкое распространение в технике.

К числу дроссельных приборов, применяющихся для измерения установившихся расходов разнообразных жидкостей, в том числе и газов, относятся расходомерная диафрагма (фиг. 16-1), расходомерное сопло (фиг. 16-2) и расходомерная труба (труба Вентури) (фиг. 16-3).

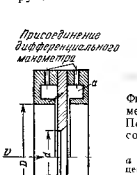
Принцип работы этих приборов основан на использовании зависимости, устанавливающейся по уравнению Бернулли в потоке жидкости, между расходом и искусственно создаваемым в двух сечениях потока перепадом давлений.

Рассмотрим наиболее общий случай — поток жидкости через диафрагму (фиг. 16-4). Ее можно рассматривать как внезапное сжатие с последующим внезапным расширением, поэтому живое сечение потока ω_c после прохода отверстия диафрагмы, кромка которой должна быть острой, будет меньше площади отверстия ω

$$\omega_c = \varepsilon\omega,$$

где ε — коэффициент сжатия струи.

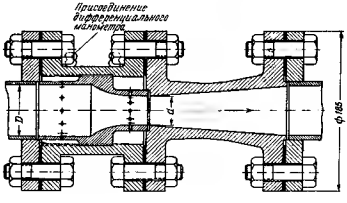
Наибольшую скорость поток будет иметь в сечении ω_c. Благодаря увеличению скорости в этом сечении увеличивается удельная кинетическая энергия потока, что вызывает соответствующее уменьшение удельной потенциальной энергии и уменьшение давления в сечении ω_c по сравнению с давлением в сечении *1-1*.



Фиг. 16-1. Расходомерная диафрагма. Показаны два способа отбора давлений.
а — посредством кольцевых камер, *б* — посредством сверлений.

Таким образом, между сечениями *1-1* и *c-c* создается перепад давлений. Для установления связи между расходом и перепадом давления воспользуемся уравнением Бернулли для двух сечений потока: первое сечение возьмем перед диафрагмой,

Фиг. 16-2. Расходомерное сопло. Слева — для $\left(\frac{d}{D}\right)^2 \leqslant 0{,}45$; справа — для $\left(\frac{d}{D}\right)^2 > 0{,}45$.



Фиг. 16-3. Расходомерная труба Вентури.

а второе — в суженном сечении струи ω_c. При этом будем иметь

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c c_c^2}{2g} + \zeta\frac{v_c^2}{2g},$$

Фиг. 16-4. Схема потока через расходомерную диафрагму

где ζ коэффициент сопротивления дросселя.

Имея в виду, что $z_1 = z_c$, а расход

$$Q = v\,\omega_1 = v_c\,\omega = v_c\,\omega\varepsilon,$$

получим:

$$\frac{p_1 - p_c}{\gamma} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{\alpha_c + \zeta}{\omega^2\varepsilon^2} - \frac{\alpha_1}{\omega_1^2}\right),$$

откуда

$$Q = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\alpha_c + \zeta}{\varepsilon^2} - \alpha_1\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}\sqrt{2g}\cdot\sqrt{\frac{p_1 - p_c}{\gamma}} = \mu\omega\sqrt{2g}\cdot\sqrt{\frac{p_1 - p_c}{\gamma}}, \tag{16-1}$$

где

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_c + \zeta}{\varepsilon^2} - \alpha_1\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} \tag{16-2}$$

называется теоретическим коэффициентом расхода.

Разность (перепад) давлений замеряется или дифференциальным пьезометром по схеме фиг. 4-11, или дифференциальным ртутным манометром по схеме фиг 4-12

В том и другом случае Q определяется по формуле

$$Q = C\cdot\sqrt{h}, \tag{16-3}$$

где C будем называть коэффициентом дроссельного прибора.

Теоретическое значение C равно

$$C_m = \mu\omega\sqrt{2g} \tag{16-4}$$

— для дифференциального пьезометра,

$$C_m = \mu\omega\sqrt{2g\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}} \tag{16-5}$$

— для ртутного дифференциального манометра.

Заметим, что для измерения перепада давления может быть использован и пружинный дифференциальный манометр.

Полученные зависимости справедливы также и для сопла (фиг. 16-2) и для трубы (фиг. 16-3) Только и для сопла и для трубы надо принять $\varepsilon = 1$, так как сжатое живое сечение потока ω_c равно площади проходного отверстия дросселя ω.

Теоретически вычислить действительное значение коэффициента расхода μ и коэффициента дроссельного прибора C невозможно ввиду того, что на его значение оказывают влияние трудно учитываемые факторы:

а) коэффициенты α_1 и α_c;

б) коэффициент сжатия ε (для диафрагмы);

в) коэффициент сопротивления прибора ζ;

г) температура, изменения которой влияют на размеры проходных отверстий.

Кроме того, на практике замер давлений производится не в сечениях, совпадающих с расчетными по уравнению Бернулли, а в углах при помощи отверстий или кольцевых камер, как изображено на фиг. 16-1 и 16-2. Ввиду этого значение коэффициента расхода μ и коэффициента дроссельного прибора C определяют опытным путем.

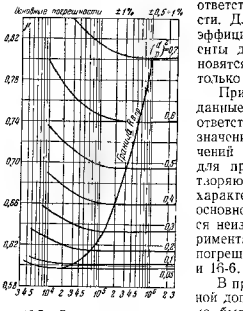
Для нормальных диафрагм и сопел, размеры которых нормализованы при условии их нормальной установки согласно руководящим указаниям[1], коэффициенты расхода μ в функции Re изображены на фиг. 16-5 и 16-6. Параметром каждой кривой является квадрат отношения диаметров, т. е $\left(\frac{d}{D}\right)^2$, причем размеры прибора соответствуют температуре его $t = 20°$ С.

[1] Правила 2754 по применению и поверке расходомеров с нормальными диафрагмами, соплами и трубами Вентури, Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, Машгиз, 1955.

Для расходной трубы, показанной на фиг. 16-3, значение μ практически совпадает со значением μ для сопел. Для других форм смотри руководящие указания.

Из фиг. 16-5 и 16-6 следует, что, начиная с определенного значения числа Re, коэффициенты расхода достигают предельных значений (для диафрагмы минимальных, для сопла максимальных).

Назовем эти значения чисел Re предельными. Очевидно, режимы движения с $Re > Re_{пр}$ следует рассматривать как соответствующие квадратичной области. Для квадратичной области коэффициенты расхода μ и коэффициенты дроссельного прибора C становятся постоянными, зависящими только от отношения d/D.



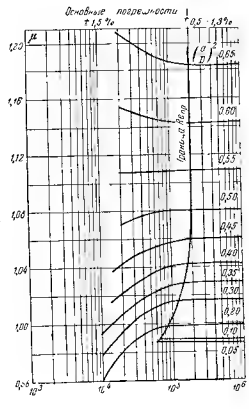
Фиг 16-5 Зависимость коэффициента расхода μ от Re_D для нормальной диафрагмы. Каждая линия соответствует определенному значению $\left(\frac{d}{D}\right)^2$.

Приведенные на фиг. 16-5 и 16-6 данные о коэффициенте расхода соответствуют его некоторым средним значениям. Отклонение средних значений от действительных значений для приборов, в точности удовлетворяющих нормальным условиям, характеризуется так называемой основной погрешностью, являющейся неизбежной при обработке экспериментальных данных, эти основные погрешности указаны на фиг. 16-5 и 16-6.

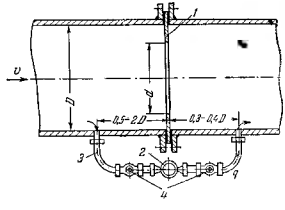
В практических условиях к основной допускаемой погрешности должна быть присоединена погрешность за счет шероховатости трубопровода и за счет недостаточной остроты кромки отверстия (только для диафрагмы) Общая вероятная погрешность принимается равной корню квадратному из суммы квадратов вероятных погрешностей: основной, от шероховатости и от неостроты кромки (только для диафрагмы). Подробнее см. Правила [1].

Главнейшим преимуществом дроссельных приборов является отсутствие на пути жидкости каких-либо механизмов. Потери энергии в них зависят главным образом от степени сужения потока. При одинаковом сужении наименьшие потери возникают в

[1] См. сноску на стр 275.



Фиг 16-6 Зависимость коэффициента расхода μ от Re_D для нормального сопла. Каждая линия соответствует определенному значению $\left(\frac{d}{D}\right)^2$.



Фиг 16-7 Скоростной водомер, установленный параллельно с диафрагмой.

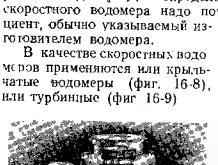
1 — диафрагма 2 — скоростной водомер 3 — отвод, 4 — кран.

расходомерной трубе, в которой благодаря диффузору преобразование большой скорости в суженном сечении в малую скорость в трубопроводе происходит в более благоприятных условиях. Наибольшие потери имеют место в диафрагме.

Для измерения общего количества жидкости, которое проходит через трубопровод за некоторый промежуток времени, может быть использована расходомерная установка, представляющая параллельное соединение дроссельного прибора с так называемым скоростным водомером фиг. 16-7. Скоростной водомер, рассчитываемый на пропуск малого количества жидкости, устанавливается в параллельном трубопроводе, присоединенном вместо дифференциального манометра. Благодаря разности давлений в точках приключения трубы небольшое количество жидкости, пропорциональное количеству жидкости в главной трубе, пойдет по параллельной трубе через скоростной водомер. Для определения всего количества показания скоростного водомера надо помножить на некоторый коэффициент, обычно указываемый изготовителем водомера.

Фиг. 16-8. Крыльчатый водомер
1 — крыльчатка, 2 — счетный механизм, 3 — регулятор, 4 — стекло, 5 — крышка

В качестве скоростных водомеров применяются или крыльчатые водомеры (фиг. 16-8), или турбинные (фиг. 16-9)

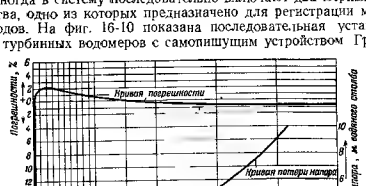

Фиг. 16-9. Турбинный водомер

Фиг. 16-10. Установка двух последовательно работающих водомеров.

Основной деталью этих водомеров является крыльчатка или турбинка (вертушка), изготавливаемая для холодной воды $t < 30°$ C из пластмассы, а для горячей ($t > 90°$ C) из латуни. Зависимость между расходом и числом оборотов крыльчатки и вертушки устанавливается на основании опытных данных, соответственно с чем изготавливается и счетный механизм.

Одним из недостатков скоростных водомеров является то, что для каждого из них существует предельный минимальный расход, меньше которого он перестает его регистрировать. В табл. 16-1 приведены некоторые данные скоростных водомеров.

Иногда в систему последовательно включают два мерных устройства, одно из которых предназначено для регистрации малых расходов. На фиг. 16-10 показана последовательная установка двух турбинных водомеров с самопишущим устройством. График



Фиг. 16-11. Зависимость погрешностей турбинных водомеров от расхода.

на фиг. 16-11 указывает значение погрешностей этой установки и величину потерь удельной энергии (напора) для водомеров с диаметрами 50/30 *мм*. Если расход, соответствующий потере напора в 10 *м* вод. ст., принять за 100%, то этим графиком погрешности можно пользоваться и для других размеров турбинных водомеров.

Вертушки получили широкое распространение в гидрометрической практике, также и для определения скоростей потока. В советской гидрометрической практике применяют вертушки с горизонтальной осью вращения (системы Грицюка, Жестовского, Государственного гидрологического института, опытного судостроительного бассейна), а также вращающиеся на вертикальной оси (системы Института водного хозяйства Средней Азии).

Задача 16-1. Определить расход воды (см. фиг. 16-2) посредством расходомерного сопла $d = 0{,}6$, установленного на трубопроводе $D = 100$ *мм*, если ртутный дифференциальный манометр, присоединенный к расходомеру, показывает $h = 400$ *мм* рт. ст.

Объемный вес ртути в манометре $\gamma_p = 13\,550$ *кГ/м*³. Вязкость воды $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ *м*²/*сек*

Таблица 16 1

Технические характеристики скоростных водомеров

Калибр водомера, мм	Тип водомера	Характерный расход, $м^3/час$	Низкий предел измерения, $м^3/час$	Наибольшая потеря напора при номинальном расходе, м	Допускаемая нагрузка при непрерывной работе, $м^3/час$	Коэффициент чувствительности	Область учета $Q_{мин}/Q_{мах}$
	А. Крыльчатые водомеры						
15	ВК 3 (ВКМ-3)	3	0,10	0,9	1,5	8,80	1:9
20	ВК 5 (ВКМ 5)	5	0,15	1,5	2,5	10,00	1:10
30	ВК-10 (ВКМ 10)	10	0,25	3,0	5,0	12,70	1:12
40	ВК-20 (ВКМ 20)	20	0,50	6,0	10,0	10,00	1:12
	Б. Турбинные водомеры						
50	ВВ-50	70	3	15	22	2,00	1:5
80	ВВ 80	250	6	45	80	1,02	1:7,5
100	ВВ-100	440	11	75	140	0,82	1:7
150	ВВ-150	1 000	15	160	380	0,80	1:10,5
200	ВВ-200	1 700	26	265	550	0,88	1:10

· Характерный расход соответствует потерям напора 10 м вод. ст.

Решение. Предполагая квадратичный режим движения, примем $\mu = 1{,}03$ (согласно фиг 16-6).

Расход вычислим по формуле

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}h} = 1{,}03\cdot 0{,}2827\sqrt{19{,}5\cdot 2\cdot 12{,}55} = 29{,}4\ л/сек.$$

Найдем число Re

$$Re = \frac{Q}{0{,}785 D\nu} = \frac{29{,}4}{0{,}785\cdot 1\cdot 1\cdot 10^{-4}} = 370\,000.$$

Предположение о квадратичной зоне соответствует действительности. Расчет сделан правильно

Глава семнадцатая

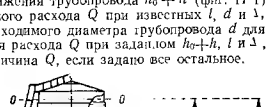
МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ, ПИТАЮЩИХСЯ ОТ РЕЗЕРВУАРОВ, УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ В КОТОРЫХ ОСТАЕТСЯ ПОСТОЯННЫМ

Гидравлические расчеты трубопроводов, питающихся от резервуаров, уровень жидкости в которых остается постоянным, могут встретиться при расчете трубопроводов, присоединенных к большим резервуарам. В этом случае весьма часто изменение уровня жидкости в резервуаре за время раздачи столь незначительно, что оно никакого практического влияния на величину

расхода не оказывает. Подобные трубопроводы могут быть или сложными (разветвленными), или простыми не имеющими разветвлений Существуют два метода гидравлических расчетов трубопроводов: аналитический и графоаналитический.

17-1. Самотечный трубопровод постоянного сечения (простой трубопровод)

Трубопровод называется самотечным, если все его части располагаются ниже уровня жидкости, находящейся в резервуаре, из которого жидкость вытекает. Расчет такого простого трубопровода в основном заключается или в определении необходимой величины снижения трубопровода $h_0 + h$ (фиг. 17 1) для обеспечения заданного расхода Q при известных l, d и λ, или в определении необходимого диаметра трубопровода d для обеспечения требующегося расхода Q при заданном $h_0 + h$, l и λ, или рассчитывается величина Q, если задано все остальное.



Фиг 17-1. Схема самотечного трубопровода.

В общем случае гидравлический расчет длинного трубопровода, питающегося от проектируемой мощной насосной станции или высокой водонапорной башни, должен сочетаться и с экономическим расчетом. Проектирование мощных станций или высоких башен позволяет экономить на стоимости трубопроводов, которые получаются меньшего диаметра, и, наоборот, проектирование трубопроводов большого диаметра дает экономию на стоимости насосных станций и башен.

Для самотечных трубопроводов, когда представляется возможность использовать естественный рельеф местности для создания необходимого снижения трубопровода, нет почти никаких оснований для ограничения величин скорости и расхода какими-либо значениями, если только эти скорости и расходы обеспечивают нормальную работу трубопровода и всей установки. В таких случаях приходится считаться лишь с явлениями кавитации (что возникает, когда давление в жидкости падает до пределов парообразования) и с явлениями гидравлического удара (теория гидравлического удара будет изложена в гл 19).

Для получения расчетных формул воспользуемся уравнением Бернулли, написанным для сечений $0-0$ и $1-1$, показанных на схеме, и для плоскости сравнения, выбранной на уровне конца трубопровода. В обоих сечениях существует гидростатический закон распределения давления

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l_c + h}{d} + \Sigma\zeta\right) \frac{v_{mp}^2}{2g}.$$

В этом уравнении $z_0 - z_1 = h + h_0$, $v_0 \approx 0$, как скорость на свободной поверхности жидкости в резервуаре $v_1 = v_{mp}$. Таким образом,

$$h_0 + h + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{v_{mp}^2}{2g}\left(\alpha_1 + \lambda \frac{l_c + h}{d} + \Sigma\zeta\right),$$

откуда

$$h_0 + h = \frac{Q^2}{2g\omega_{mp}^2}\left(\alpha_1 + \lambda \frac{l_c + h}{d} + \Sigma\zeta\right) - \frac{p_0 - p_1}{\gamma}. \qquad (17\text{-}1)$$

Это уравнение является основным. Оно просто разрешается относительно h. В этом случае

$$h = \frac{\frac{Q^2}{2g\omega_{mp}^2}\left(\alpha_1 + \lambda \frac{l_c}{d} + \Sigma\zeta\right) - \frac{p_0 - p_1}{\gamma} - h_0}{1 - \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{Q^2}{2g\omega_{mp}^2}}. \qquad (17\text{-}2)$$

Диаметр трубопровода из уравнения (17-1), если все остальные величины известны, может быть найден только методом подбора. Для определения диаметра необходимо в этом случае задаться несколькими его значениями, добившись равенства левой и правой частей уравнения.

Решая уравнение (17-1) относительно v_{mp}, получим:

$$v_{mp} = \frac{\sqrt{2g\left(h_0 + h + \frac{p_0 - p_1}{\gamma}\right)}}{\sqrt{\alpha_1 + \lambda \frac{l_c + h}{d} + \Sigma\zeta}} \qquad (17\text{-}3)$$

Расход Q найдем по формуле

$$Q = v_{mp}\omega_{mp} = \mu\omega_{mp}\sqrt{2g\left(h_0 + h + \frac{p_0 - p_1}{\gamma}\right)}, \qquad (17\text{-}4)$$

где $h_0 + h + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = H_0$ называется напором истечения,

а

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \lambda \frac{l_c + h}{d} + \Sigma\zeta}}$$ называется коэффициентом расхода. (17-5)

Если на поверхности жидкости в резервуаре и на конце трубопровода имеются одинаковые давления $p_1 = p_0$, то

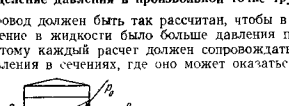
$$Q = \mu\omega_{mp}\sqrt{2g(h_0 + h)} = \mu\omega_{mp}\sqrt{2gH} \qquad (17\text{-}6)$$

Ввиду того, что коэффициенты α, λ и ζ являются в общем случае функцией числа Re, уравнения (17-4) и (17-6) могут быть решены также только методом последовательного приближения. Для предварительного определения Q необходимо предположить сперва движение, соответствующее квадратичной области. В этом случае коэффициенты α, λ и ζ принимаются постоянными.

Определив по найденному значению Q число Re, необходимо уточнить значения λ и ζ, а по ним найти новое значение Q, которое в конечном счете должно соответствовать Re.

17-2. Определение давления в произвольной точке трубопровода

Трубопровод должен быть так рассчитан, чтобы в любой его точке давление в жидкости было больше давления парообразования. Поэтому каждый расчет должен сопровождаться определением давления в сечениях, где оно может оказаться наименьшим, и сопоставлением полученного значения с давлением, соответствующим давлению парообразования.



Фиг 7 2 Пьезометрическая линия простого трубопровода

Для определения давления в произвольной точке потока k (фиг. 17 2) необходимо воспользоваться уравнением Бернулли, написанным для сечений $0-0$ и $k-k$. В сечении $k-k$ давление принимаем распределяющимся по законам гидростатики. Решая это уравнение относительно давления, найдем:

$$\frac{p_k}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h_k - \left[\frac{v_k^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l_k}{d} + \Sigma\zeta\right)_k \frac{v^2}{2g}\right]. \qquad (17\text{-}7)$$

В выражении, определяющем потери удельной энергии, индекс k указывает на то, что потери определяются до точки k.

Заметим, что, как и в гидростатике, давление в некоторой точке жидкости может быть найдено только в том случае, если известно давление в какой-либо другой, но в отличие от гидростатического давления на величину гидродинамического давления оказывают влияние гидравлическое сопротивление и значение скоростного напора.

Из формулы (17-7) следует, что давление p_k в какой-либо точке трубопровода тем меньше, чем меньше h_k, т. е. чем выше расположена точка. Давление p_k тем меньше, чем больше скорость в трубопроводе, т. е. чем больше H (напор истечения).

Распределение давлений по длине трубопровода весьма просто изображается графически, если можно принять падение давления подчиняющимся линейному закону (т. е. пренебречь местными сопротивлениями). В этом случае аналитически вычисляется давление в потоке (на конце горизонтального участка в точке $г$). В рассматриваемом примере в точке $г$ оказывается вакуум. Величина этого вакуума откладывается в виде двух отрезков $p_в$, концы которых соединяются прямой линией с точкой m, соответствующей давлению в начале участка, и точкой n (конец трубопровода, где избыточное давление равно нулю). Точка r определяет сечение в трубопроводе, избыточное давление в котором также равно нулю. Справа от точки r в трубопроводе находится область вакуума. Если длина горизонтальной части трубопровода значительно больше длины вертикального конца, можно достаточно точно давления для горизонтального участка получить, соединив точку m с концом трубопровода

Для нормальной работы в любой точке должно быть

$$\frac{p_k}{\gamma} > \frac{p_{II}}{\gamma}. \qquad (17\text{-}8)$$

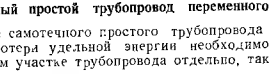
Если расчет дает для p_k давление, меньшее, чем давление парообразования, это значит, что в трубопроводе имеет место кавитация, благодаря которой нормальная работа невозможна.

Кавитацией называется явление местного образования пузырьков жидкости в виде сначала небольших пространств, заполненных парами жидкости и воздухом. Это явление имеет связь главным образом с объемной прочностью жидкостей. В практических условиях кавитация возникает в местах, где давление в жидкости делается равным давлению парообразования. В потоках кавитационные области возникают, как правило, в наиболее возвышенных местах или в местах наибольших скоростей, а также на поверхностях лопаток вращающихся рабочих колес насосов, турбин, винтов, в местах, особо неблагоприятных с точки зрения обтекания. Одним из наиболее опасных последствий кавитации является разрушение кавитационными пузырьками поверхности тел, расположенных в области кавитации. Это

объясняется следующими причинами Кавитационный пузырек уносится потоком в область повышенного давления, где и конденсируется Конденсация сопровождается быстрым смыканием поверхности окружающей его жидкости и появлением больших скоростей. Благодаря этому при конденсации на поверхности трубопровода или лопаток происходит удар жидкости о поверхность, в результате которого в месте удара весьма часто возникает давление, достигающее нескольких тысяч $кГ/см^2$. Такие удары разрушают поверхность в местах удара, создают в системе опасные вибрации и часто выводят систему из строя Раньше было принято считать, что кавитационное разрушение материала обусловливается также температурными, химическими и электрическими явлениями, возникающими при этом. Однако современные исследования этого вопроса показали ошибочность такой точки зрения. Кавитационному разрушению, не зависящему от рода жидкости подвержены, наряду с металлами, бакелит, резина, цемент, стекло и др

17-3. Самотечный простой трубопровод переменного сечения

При расчете самотечного простого трубопровода переменного сечения потери удельной энергии необходимо определить на каждом участке трубопровода отдельно, так как ско-



Фиг. 17 3 Схема простого трубопровода переменного сечения.

рости движения жидкости на каждом участке неодинаковы. Уравнение Бернулли для случая, изображенного на фиг. 17-3, будет иметь вид:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_{mp} \frac{v_{mp}^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_{mp2} \frac{v_{mp2}^2}{2g}. \qquad (17\text{-}9)$$

Принимая $z_0 - z_2 = h_0$, $v_0 \approx 0$ и $p_0 = p_2$, воспользовавшись уравнением неразрывности $v_{mp1}\omega_{mp1} = v_{mp2}\omega_{mp2}$, получим:

$$Q = v_{mp1}\omega_{mp1} = \omega_{mp1} \frac{\sqrt{2g(h_0 - h)}}{\sqrt{\left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_{mp1} + \left(\alpha_2 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_{mp2} \left(\frac{\omega_{mp1}}{\omega_{mp2}}\right)^2}} = v_{mp1}\omega_{mp1} \sqrt{2g(h_0 - h)}, \qquad (17\text{-}10)$$

где

$$\mu_{mp1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp1}+\left(\alpha_2+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp2}\left(\frac{\omega_{mp1}}{\omega_{mp2}}\right)^2}}. \quad (17\text{-}11)$$

В последней формуле μ_{mp1} — коэффициент расхода, отнесенный к первому трубопроводу.

Обратим внимание на то, что расход Q можно вычислить и через скорость v_{mp2}. Однако при этом выражение для коэффициента расхода, отнесенного к второму трубопроводу, будет иное. Величина расхода, конечно, должна быть одной и той же. Во втором случае получим.

$$Q = \mu_2\omega_{mp2}\sqrt{2g(h_0-h)}, \quad (17\text{-}12)$$

где

$$\mu_{mp2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp1}\left(\frac{\omega_{mp2}}{\omega_{mp1}}\right)^2+\left(\alpha_2+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp2}}}. \quad (17\text{-}13)$$

Задача 17-1. Определить время наполнения бензином емкости $W = 3\,200$ *л* согласно следующим данным (фиг. 17-3) $h_0 = 8$ *м*, $h = 1$ *м*, $l_1 = 50$ *м*, $d_1 = 106$ *мм*, $\Delta_1 = 0{,}6$ *мм*, $l_2 = 50$ *м*, $d_2 = 80{,}5$ *мм*, $\Delta_2 = 0{,}6$ *мм*.

На трубопроводах установлены две задвижки. Трубопровод имеет три закругления. Кинематический коэффициент вязкости бензина $\nu = 0{,}008$ *см²/сек*.

Решение. Время наполнения определим по формуле

$$t = \frac{W}{Q},$$

где Q — расход жидкости в трубопроводе и вычисляется по формуле

$$Q = \mu_1\omega_{mp1}\sqrt{2g(h_0-h)}.$$

Коэффициент расхода, отнесенный к первому трубопроводу, равен.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp1}+\left(\alpha_2+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)_{mp2}\left(\frac{\omega_{mp1}}{\omega_{mp2}}\right)^2}}.$$

Для определения коэффициентов α, λ и ζ надо было бы знать число Re, которое неизвестно, так как не известен расход Q. Ориентировочно расчет можно было бы произвести, считая режим движения соответствующим квадратичной зоне. После этого, определив расход и вычислив число Re, следует, если это необходимо, произвести второй уточняющий расчет. Для данной задачи предварительные расчеты дают следующее значение.

для трубопровода $d_1 = 106$ *мм* . . . . . $Re = 165\,000$

для трубопровода $d_2 = 80{,}5$ *мм* . . . . . $Re = 2{,}9\,000$

Этим значениям Re по формуле (14-48) соответствуют значения

$$\lambda_1 = 0{,}0321, \quad \lambda_2 = 0{,}034$$

Значения α_2 и ζ примем для турбулентного движения равными

$$\alpha_2 = 1{,}1, \quad \zeta_3 = 0{,}9.$$

$$\zeta_{задв} = 0{,}12; \quad \zeta_{вх} = 0{,}5, \quad \zeta_{пер} = 0{,}26\left(\frac{d_2}{d_1} = 0{,}76\right)$$

Таким образом,

$$\mu_1 = 1\left[\left(0{,}5+0{,}0321\frac{50}{0{,}106}+2\cdot 0{,}918+0{,}12\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1{,}1+0{,}034\frac{50}{0{,}0805}+0{,}26+0{,}918+0{,}12\right)\cdot 3{,}01\right]^{1/2} = 0{,}107,$$

$$Q = 0{,}107\cdot 0{,}785\cdot 1{,}06^2\sqrt{19{,}6\cdot 2\cdot 70} = 11 \text{ л/сек};$$

$$t = \frac{W}{Q} = \frac{3\,200}{11} = 291 \text{ сек}$$

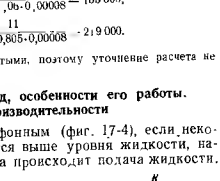
$$Re = \frac{Q}{0{,}785 d_1\nu} = \frac{11}{0{,}785\cdot 1{,}06\cdot 0{,}00008} = 165\,000;$$

$$Re = \frac{Q}{0{,}785 d_2\nu} = \frac{11}{0{,}785\cdot 0{,}805\cdot 0{,}00008} = 2{,}9\,000.$$

Эти значения совпадают с принятыми, поэтому уточнение расчета не требуется

17-4. Сифонный трубопровод, особенности его работы. Определение производительности

Трубопровод называется сифонным (фиг. 17-4), если некоторые его участки располагаются выше уровня жидкости, находящейся в резервуаре, откуда происходит подача жидкости.



Фиг. 17-4. Схема сифонного трубопровода

Поэтому сифонные трубопроводы требуют предварительной заливки. Расход в сифонном трубопроводе определяется по формулам, аналогичным простым трубопроводам.

Для определения предельного возвышения сифонного трубопровода следует исходить из формулы (17-7).

При увеличении h_K (в этом случае h_K будет (фиг. 17-4) отрицательным), как это следует из формулы, давление p_K уменьшается. Предельное возвышение $h_{K\,пр}$ будет достигнуто тогда, когда p_K упадет до p_H.

Прежде чем приступить к преобразованиям, выделим из выражения потерь удельной энергии члены, включающие высоту h_K, будем иметь

$$\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g} = \left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)'\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{h_K}{d}\frac{v^2}{2g}.$$

Здесь штрих ' у скобки подчеркивает, что члены с $h_к$ из потерь исключены и рассматриваются самостоятельно. Тогда

$$\frac{p_{П}}{\gamma}=\frac{p_0}{\gamma}-\left[h_{к\,пр}+\frac{\alpha_к v_к^2}{2g}+\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)'\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{h_{к\,пр}}{d}\frac{v^2}{2g}\right],$$

откуда

$$h_{к\,пр}=\frac{\frac{p_0-p_{П}}{\gamma}-\left[\frac{\alpha_к v_к}{2g}+\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)'\frac{v^2}{2g}\right]}{1+\lambda\frac{1}{d}\frac{v^2}{2g}}. \qquad (17\text{-}14)$$

Выражая скорости через расход, определяемый по формуле (17-4), получим

$$h_{к\,пр}=\frac{\frac{p_0-p_{П}}{\gamma}-\left[\frac{\alpha_к}{\omega_к^2}+\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)'\frac{1}{\omega_{тр}^2}\right]\mu^2\omega_{тр}^2 H}{1+\frac{\lambda}{d}\mu^2 H}. \qquad (17\text{-}15)$$

17-5. Графоаналитический метод расчета производительности сифонного или самотечного трубопровода

В основу графоаналитического метода расчета положим формулу (17-1) для $p_0=p_1$

$$z=\left(\alpha+\lambda\frac{l_э+h}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2}, \qquad (17\text{-}16)$$

т. е.

$$z=aQ^2, \qquad (17\text{-}17)$$

где

$$z=h_0+h;$$

$$a=\frac{1}{2g\omega^2}\left(\alpha+\frac{l_э+h}{d}\lambda+\Sigma\zeta\right). \qquad (17\text{-}18)$$

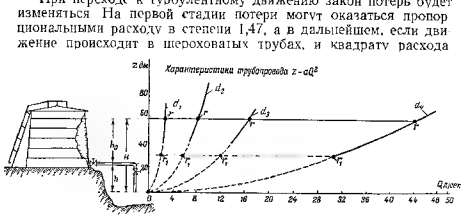
Если рассматривать z и Q как переменные величины, то зависимость между ними может быть изображена графически следующим образом (фиг. 17-5). Начало координат выберем на уровне конца сливного трубопровода.

Ось абсцисс примем за ось Q, а ось ординат за z.

Задаваясь значениями Q_1, Q_2... и т. д., вычисляя λ и ζ для заданного диаметра в соответствии с режимом движения (Re) и определяя соответствующие значения z_1, z_2 и т. д., построим кривую, которую будем в дальнейшем называть характеристикой простого трубопровода. Коэффициент a в выражении $z=aQ^2$ будем называть коэффициентом характеристики.

Вид характеристики трубопровода будет зависеть от режимов движения, соответствующих расходам. При малых расходах, которым при заданной вязкости жидкости и размерах трубопровода будет соответствовать малое Re, движение может оказаться ламинарным во всем трубопроводе, в том числе и в местных сопротивлениях, и характеристика трубопровода для этих режимов будет изображаться прямой линией

При переходе к турбулентному движению закон потерь будет изменяться. На первой стадии потери могут оказаться пропорциональными расходу в степени 1,47, а в дальнейшем, если движение происходит в шероховатых трубах, и квадрату расхода



Фиг. 17-5. Графоаналитический способ определения производительности. Точки r определяют расходы, соответствующие определенным условиям и размерам трубопроводов.

Таким образом, характеристика трубопровода на всем своем протяжении может меняться, переходя от прямой линии к квадратичной параболе. При жидкостях маловязких, как правило, линейная зона отсутствует.

Если расчет относится к области квадратичной, то коэффициент характеристики трубопровода a есть величина постоянная. Во всех случаях конец пунктирных линий на фиг. 17-5 соответствует началу квадратичной зоны.

При каком-то уровне h_0+h H производительность трубопровода определится точкой пересечения характеристики трубопровода с горизонталью, проведенной на уровне жидкости в резервуаре (точка r).

При изменении уровня производительность трубопровода также будет изменяться. Но при любых уровнях производительность будет определяться пересечением характеристики трубопровода с соответствующей горизонталью.

При изменении диаметра трубопровода будет изменяться коэффициент характеристики a, а значит и характеристика трубопровода. При уменьшении диаметра она будет подниматься круче, а при увеличении диаметра положе. Вследствие этого будет также изменяться и производительность трубопровода.

Задача 17-2. Исследование производительности трубопровода. Определить графоаналитическим методом производительность самотечного трубопровода, изображенного на фиг. 17-5, и проанализировать влияние на производительность диаметра трубопровода и высоты налива бензина в резервуаре.

Длину трубопровода примем равной 100 *м*. Диаметр трубопровода $d_4 = 156$ *мм*, $d_3 = 106$ *мм*, d_2 80,6 *мм*, $d_1 = 53$ *мм*, шероховатость $\Delta = 0{,}6$ *мм*.

Для анализа необходимо построить характеристики трубопроводов.

При построении характеристик трубопроводов примем λ соответствующими квадратичной зоне.

Характеристика трубопровода диаметром 53 *мм* будет выражена уравнением

$$z_1 = \left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \zeta_{вх} + \zeta_{вент} + \zeta_{з}\right)\frac{Q^2}{2g\omega^2};$$

$$z_1 = \left(1{,}1 + 0{,}04\frac{100}{0{,}053} + 0{,}5 + 2\cdot 0{,}8 + 0{,}134\right)\frac{Q^2}{9{,}55} = 8{,}24Q^2 \text{ дм}.$$

Характеристики других трубопроводов будут выражены аналогичными уравнениями:

$$z_2 = \left(1{,}1 + 0{,}034\frac{100}{0{,}0805} + 0{,}5 + 2\cdot 1{,}2 + 0{,}134\right)\frac{Q^2}{196{,}2\cdot 0{,}259} = 0{,}91Q^2,$$

$$z_3 = \left(1{,}1 + 0{,}031\frac{100}{0{,}106} + 0{,}5 + 2\cdot 1{,}2 + 0{,}134\right)\frac{Q^2}{196{,}2\cdot 0{,}779} = 0{,}217Q^2,$$

$$z_4 = \left(1{,}1 + 0{,}0028\frac{100}{0{,}156} + 0{,}5 + 2\cdot 1{,}2 + 0{,}134\right)\frac{Q^2}{196{,}2\cdot 3{,}65} = 0{,}0306Q^2.$$

Данные для построения характеристик трубопроводов приведены в таблице.

Q, *л/сек*	2	4	6	8	10	12	16	18	20	30	40
z_1	32,95	132	297	—	—	—	—	—	—	—	—
z_2	3,64	14,6	32,8	58	91	—	—	—	—	—	—
z_3	0,87	3,47	7,81	13,88	21,7	31,25	55,6	70,0	—	—	—
z_4	0,12	0,49	1,10	1,96	3,06	4,4	7,84	9,9	12,24	27,54	76

Точка r пересечения характеристик трубопроводов с горизонтальной прямой, проведенной на уровне свободной поверхности жидкости в резервуаре, определяет расход в трубопроводе.

При изменении уровня с 6 до 3 *м* расход изменяется.

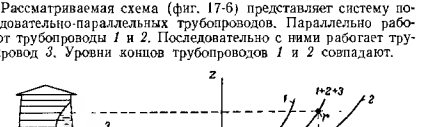
для трубопроводов d_1 с 2,72 *л/сек* до 1,91 *л/сек*
d_2 „ 8,1 „ „ 5,74 „
d_3 „ 16,6 „ „ 11,80 „
d_4 „ 44,3 „ „ 31,3 „

Здесь следует обратить внимание на увеличение производительности трубопровода с увеличением диаметра. Так, например, производительность трубопровода диаметром $d = 156$ *мм* в 6,1 раза больше производительности трубопровода $d = 53$ *мм*. Это соотношение получено для $l = 100$ *м*. При этом надо иметь в виду, что увеличение производительности происхо-

дит не только за счет увеличения площади сечения трубопровода (в рассматриваемом случае площадь возросла всего лишь в 4 раза), но также и за счет уменьшения гидравлического сопротивления трубопровода. В разбираемом примере это дало увеличение производительности в 1,53 раза. В турбулентном движении приближенно можно считать, что производительность трубопровода пропорциональна диаметру в степени 2,5, в ламинарном движении — пропорциональна диаметру в четвертой степени.

17-6. Графоаналитический метод расчета самотечного разветвленного трубопровода

Рассматриваемая схема (фиг. 17-6) представляет систему последовательно-параллельных трубопроводов. Параллельно работают трубопроводы *1* и *2*. Последовательно с ними работает трубопровод *3*. Уровни концов трубопроводов *1* и *2* совпадают.



Фиг 17-6 Схема графоаналитического способа расчета разветвленного трубопровода.

Определение производительности рассматриваемой системы произведем графоаналитически следующим способом. Систему трубопроводов разобьем на три участка: первый — трубопровод *1*, второй — трубопровод *2* и третий — трубопровод *3*. Характеристика трубопровода соответствующего участка будет выражаться на основании предыдущего следующими уравнениями:

$$z_1 = \left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_1 \frac{Q^2}{2g\omega_{тр1}^2};$$

$$z_2 = \left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_2 \frac{Q^2}{2g\omega_{тр2}^2};$$

$$z_3 = \left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)_3 \frac{Q^2}{2g\omega_{тр3}^2}.$$

Эти характеристики построим на графике, задаваясь значениями Q и определяя соответствующие значения z. Значение z_3 будем откладывать вниз от оси расходов, величины z_2 и z_1 — вверх от оси расходов. Так будет удобнее.

Результирующую характеристику трубопроводов, работающих последовательно-параллельно, построим следующим образом.

Суммарная характеристика двух параллельных трубопроводов *2* и *1* находится способом горизонтального сложения, т. е. складываются абсциссы (расходы), соответствующие одним и тем же ординатам, характеристик *2* и *1*. Полученная таким образом характеристика *1 + 2* складывается с характеристикой последовательно работающего трубопровода *3* по способу вертикального сложения, т. е. складываются ординаты, соответствующие одним и тем же абсциссам (расходам) характеристик *1 + 2* и *3*. Полученная характеристика *1 + 2 + 3* и является результирующей характеристикой всей системы трубопроводов.

Точка пересечения *r* результирующей характеристики с горизонталью, проведенной на уровне свободной поверхности, определяет производительность трубопровода *3* (т. е. всей системы).

Чтобы определить производительность каждого из трубопроводов *2* и *1*, необходимо через точку *r* провести вертикаль до пересечения ее в точке *s* с суммарной характеристикой трубопроводов *1 + 2*. Из точки *s* провести горизонталь, которая пересечет характеристики трубопроводов *2* и *1* в точках *m* и *n*. Эти точки и определят производительность каждого из трубопроводов.

Графоаналитический метод расчета значительно упрощается, если можно считать все режимы соответствующими квадратичной области. В этом случае графическое сложение характеристик трубопроводов можно заменить аналитическим. Легко показать, что в этом случае коэффициент характеристики двух параллельных трубопроводов (имеющих одинаковое снижение) определяется по формуле

$$a_{1,2} = \frac{a_1 a_2}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2}. \qquad (17\text{-}19)$$

Коэффициент характеристики трех параллельно работающих трубопроводов (имеющих одинаковое снижение) определяется по формуле

$$a_{123} = \frac{a_1 a_2 a_3}{(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \sqrt{a_2 a_3})^2}. \qquad (17\text{-}20)$$

Для трубопроводов, работающих последовательно,

$$a_{1,2,3} = a_1 + a_2 + a_3, \qquad (17\text{-}21)$$

т. е. при последовательном соединении трубопроводов разных диаметров коэффициент характеристики всего трубопровода складывается из суммы коэффициентов характеристик отдельных трубопроводов.

Задача 17-3. Требуется определить время, в течение которого скорость жидкости в трубопроводе при быстром открытии запорного устройства достигает нормального значения. Трубопровод присоединен к резервуару (фиг. 17-1), уровень жидкости в котором поддерживается постоянным.

Давление на свободной поверхности жидкости в резервуаре равно атмосферному. Жидкость вытекает также в атмосферу.

Скорость в трубопроводе при установившемся движении $v_0 = 1{,}5$ *м/сек*; общая длина $l = 250$ *м*; $H = 6$ *м*.

Решение. Исходной формулой для данного случая будет служить уравнение Бернулли для неустановившегося движения (труба постоянного сечения)

$$H = \left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g} + \frac{\beta l}{g}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Согласно формуле (17-3)

$$\left(\alpha + \lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{1}{2g} = \frac{H}{v_0^2},$$

где v_0 — средняя скорость установившегося движения, соответствующая напору H.

Подставляя это значение в исходную формулу, получим:

$$H = \frac{v^2}{v_0^2}H + \frac{\beta l}{g}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

В рассматриваемом случае (труба постоянного сечения)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}.$$

Разделяя переменные, найдем

$$\frac{gH}{\beta l v_0^2}\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{v_0^2 - v^2}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\frac{gH}{\beta l v_0^2}t = \frac{1}{2v_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v},$$

или

$$t = \frac{\beta l v_0}{2gH}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v}.$$

Из этой формулы следует, что скорость v достигает значения $v = v_0$ при $t = \infty$.

Закон изменения скорости можно получить, разрешив полученную формулу относительно v

$$v = v_0\frac{e^{\frac{2gH}{\beta l v_0}t} - 1}{e^{\frac{2gH}{\beta l v_0}t} + 1}$$

Определим время, в течение которого скорость достигнет значения

$$\frac{v}{v_0} = 0{,}99.$$

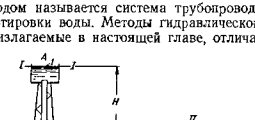
Воспользуемся формулой для t, заменив в ней $\ln$ через $\lg$ и принимая β 1,05, получим

$$t = \frac{1{,}05 \cdot 250 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}3}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6} \lg \frac{1{,}99}{0{,}01} = 17{,}6 \text{ сек.}$$

Глава восемнадцатая

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШИХ ВОДОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

Водопроводом называется система трубопроводов, служащая для транспортировки воды. Методы гидравлического расчета водопроводов, излагаемые в настоящей главе, отличаются от методов расчета трубопроводов, изложенных в гл. 17 только тем, что в расчет не вводятся местные сопротивления, учитываемые при необходимости увеличением расчетной длины трубопровода на длину, эквивалентную местным сопротивлениям.



Фиг. 18-1. Схема простого водопровода с одной водонапорной башней.

Несколько схем простых и сложных водопроводов[1] показано на фиг. 18-1—18-3, 18-6.

18-1. Последовательное соединение трубопроводов

В связи с указанным основной расчетной формулой для водопровода будет формула (18-1), аналогичная формуле (17-1), но без членов, учитывающих потери удельной энергии в местных сопротивлениях.

[1] Определение простого и сложного трубопроводов было дано в начале гл. 17

Рассматривая случай, когда $p_1 = p_2$, будем иметь.

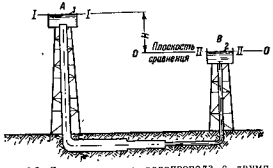
$$H = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \Sigma\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \qquad (18\text{-}1)$$

Выражая скорости через расход, найдем:

$$H = \frac{\alpha_1 Q^2}{2g\omega_1^2} + \frac{Q^2}{2g} \Sigma\lambda \frac{l}{d} \frac{1}{\omega^2} \qquad (18\text{-}2)$$

Величину H назовем напором водопровода.

Из формулы (18-2) следует, что напор H затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений, а также для создания скоростного напора в сечении II.



Фиг. 18-2 Схема простого водопровода с двумя водонапорными башнями

В том случае, если скоростной напор $\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$ мал по сравнению с потерями по длине, что имеет место в водопроводе согласно схеме фиг. 18-2, то расчетной формулой будет:

$$H = \frac{Q^2}{2g} \Sigma\lambda \frac{l}{d} \frac{1}{\omega^2}. \qquad (18\text{-}3)$$

Из этой формулы следует, что в этом случае весь напор затрачивается только на преодоление гидравлических сопротивлений.

В обеих формулах величина

$$\frac{Q^2}{2g} \lambda \frac{l}{d} \frac{1}{\omega^2}$$

определяет потерю напора h_∂ по длине на соответствующем участке. Если в длину l включена и длина, эквивалентная местным сопротивлениям, то этот член определяет потерю

удельной энергии с учетом и местных сопротивлений. Обозначим через K^2 величину

$$K^2 = \frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}. \tag{18-4}$$

При этом формулы (18-1) и (18-3) можно привести к виду:

$$H = Q^2 \Sigma \frac{l}{K^2} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}, \tag{18-5}$$

$$H = Q^2 \Sigma \frac{l}{K^2}. \tag{18-6}$$

В этих формулах $K = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}}$ называется модулем расхода. Модуль расхода имеет размерность расхода, т. е. измеряется в *м³/сек*, если d вычислено в *м* и g — в *м/сек²*, или *дм³/сек*, если d вычислено в *дм* и g — в *дм/сек²*.

Таблица 18-1

Значения квадрата модуля расхода $K^2 = \frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}$ [*дм⁶/сек²*], вычисленного для квадратичной зоны по формуле

$$\lambda = \frac{0{,}25}{\left[\lg \frac{3{,}7}{\Delta} d\right]^2}$$

d *мм*	$\Delta = 0{,}1$ *мм*	$\Delta = 0{,}2$ *мм*	$\Delta = 0{,}3$ *мм*	$\Delta = 0{,}5$ *мм*
27	6,2498	5,058	4,4195	3,6764
35,75	27,546	22,490	19,770	16,590
41	56,750	46,503	41,004	34,549
53	219,47	181,18	160,48	136,180
68	814,01	676,29	601,63	513,780
80,5	1 975,1	1 647,7	1 469,9	1 260,2
81	2 040,4	1 702,4	1 518,8	1 302,4
100	6 163,8	5 167,7	4 625,5	3 985,3
106	8 366,2	7 023,2	6 292,3	5 427,9
125	18 520	16 720	15 015	12 996
131	25 368	21 392	19 225	16 658
158	67 569	57 198	51 530	44 807
159	69 910	59 189	53 331	46 388
205	263 850	224 480	202 910	177 340
207	277 580	236 230	213 550	186 670
257	858 720	733 180	665 070	583 490
259	894 380	764 150	692 880	607 920
307	2 171 200	1 861 050	1 669 300	1 487 210
309	2 246 000	1 925 100	1 748 800	1 538 900
357	4 767 200	4 096 100	3 727 400	3 287 200
361	5 052 300	4 342 000	3 951 200	3 485 200
407	8 856 000	7 625 800	6 947 200	6 139 200
408	9 003 800	8 230 400	7 499 000	6 628 000

Величина модуля расхода K зависит от диаметра трубы и, кроме того, от значения коэффициента λ. Поэтому даже для труб одного и того же диаметра величина модуля K будет определяться в зависимости от режима движения той формулой, по которой производится подсчет λ.

Сопоставляя формулы (18-6) и (17-17), можно заметить зависимость между коэффициентом характеристики трубопровода и модулями расхода, а именно:

$$a = \Sigma \frac{l}{K^2}. \tag{18-7}$$

При этом коэффициент характеристики каждого трубопровода может быть также определен через модуль расхода

$$a = \frac{l}{K^2}, \tag{18-8}$$

где l — уже эквивалентная длина соответствующего трубопровода с учетом местных сопротивлений; для конечного участка надо учитывать также и скоростной напор на конце.

В табл. 18-1 и 18-2 даны значения модуля расхода, вычисленные для квадратичной зоны в соответствии с формулами (14-41) и (14-53).

Таблица 18-2

Значения квадрата модуля расхода K^2, *дм⁶/сек²*, вычисленного по формуле Павловского

Диаметр, *дм*	$n = 1/70$	$n = 1/80$	$n = 1/90$
0,27	2,0291	3,2008	4,6831
0,3575	9,0932	14,1777	20,8699
0,41	18,8874	28,5806	42,6718
0,53	74,4509	114,2840	165,2870
0,68	281,9700	428,2570	613,1540
0,805	694,6320	1 047,85	1 494,39
0,810	717,5260	1 082,55	1 544,22
1,000	2 213,95	3 308,43	4 686,97
1,060	3 036,93	4 506,82	6 400,78
1,310	9 369,84	13 854,50	19 443,70
1,580	25 812,5	37 398,6	52 178,2
1,590	26 367,9	38 559,2	53 948,7
2,050	109 443,0	148 749,0	205 761,0
2,070	107 792,0	155 866,0	216 471,0
2,570	342 623,0	492 751,0	670 559,0
2,590	368 424,0	513 560,0	704 035,0
3,070	886 705,0	1 264 650,0	1 726 210,0
3,570	1 983 050,0	2 808 350,0	3 820 290,0
3,6,0	2 101 510,0	2 989 050,0	4 048 380,0
4,020	3 757 250,0	5 276 800,0	7 139 960,0
4,680	8 412 720,0	11 813 200,0	15 001 700,0

Расчетные формулы значительно упрощаются, если водопровод выполнен из труб одного диаметра. В этом случае применительно к схеме (фиг. 18-1) будем иметь:

$$H = \frac{Q^2 l}{K^2} + \frac{\alpha v^2}{2g}, \qquad (18\text{-}9)$$

применительно к схеме фиг. 18-2

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l = h_d, \qquad (18\text{-}10)$$

Последняя формула может служить также для определения расхода

$$Q = K\sqrt{\frac{H}{l}} \qquad (18\text{-}11)$$

Если учесть, что $\frac{H}{l}$ является гидравлическим уклоном

$$J = \frac{H}{l},$$

то формулу (18-11) можно представить в виде:

$$Q = K\sqrt{J}. \qquad (18\text{-}12)$$

18-2. Последовательно-параллельное соединение трубопроводов

Последовательно-параллельное соединение трубопроводов показано на фиг. 18-3. Вода поступает из резервуара A. В узле B разветвляется на три потока соответственно количеству разветвлений и за узлом C движется одним потоком в резервуар D. В узлах B и C происходит отбор воды в количестве Q_B и Q_C [*л сек*]. Q_B и Q_C называются узловыми расходами.

Потери удельной энергии между узловыми пунктами B и C на любых участках равны.

Потери удельной энергии на каждом участке могут быть определены по формуле (18-10).

Таким образом, для каких нибудь двух участков разветвления будем иметь следующее равенство:

$$\frac{Q_1^2 l_1}{K_1^2} = \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^2},$$

откуда

$$Q_2 = Q_1 \frac{K_2}{K_1}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (18\text{-}13)$$

Подставляя значения K, будем иметь:

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (18\text{-}14)$$

Формулу (18-14) можно представить и в виде:

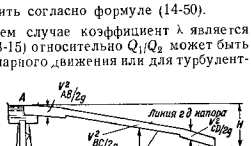
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \sqrt{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5} \sqrt{\frac{\lambda_{кв}}{\lambda_{2кв}}} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}, \qquad (18\text{-}15)$$

где θ_1 и θ_2 можно определить согласно формуле (14-50).

Ввиду того, что в общем случае коэффициент λ является функцией Re, уравнение (18-15) относительно Q_1/Q_2 может быть легко разрешено для ламинарного движения или для турбулентного движения в гладких трубах, когда λ определяется по формуле вида (14-37). Для водопровода эти случаи исключаются, так как в большинстве случаев λ является сложной функцией

$$\lambda = f\left(\frac{\Delta}{d}, Re\right).$$

Поэтому отношение Q_1/Q_2 из уравнения (18-15) может быть найдено только путем последовательных приближений.



Фиг. 18-3 Схема разветвленного водопровода.

Просто находится отношение Q_1/Q_2 при квадратичных режимах в обеих ветвях. В этом случае $\theta_1 = \theta_2 = 1$ и расходы каждого из участков разветвления прямо пропорциональны корням квадратным из пятых степеней диаметров труб и обратно пропорциональны корням квадратным из длины участков и коэффициентов λ.

При заданных узловых расходах, длинах участков, диаметрах труб и напоре H для определения расходов на отдельных участках, т. е. Q_{AB}, Q_1, Q_2, Q_3 и Q_{CD}, могут служить следующие (для данной схемы) пять уравнений:

1, 2) Потери удельной энергии на участках разветвления равны между собой:

$$\frac{Q_1^2 l_1}{K_1^2} = \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^2} = \frac{Q_3^2 l_3}{K_3^2}. \qquad (18\text{-}16)$$

3) Расход Q_{AB} на участке AB слагается из расходов на участках BIC, BHC, $BHIC$ и узлового Q_B.

$$Q_{AB} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_B. \qquad (18\text{-}17)$$

4) Расход на участке CD слагается из расходов на участках BIC, BHC, $BHIC$ за вычетом узлового расхода Q_C:

$$Q_{CD} = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_C. \qquad (18\text{-}18)$$

5) Потери удельной энергии на участке AD определяются напором H и слагаются из потерь на участке AB, на одном (любом) из участков разветвления BC и на участке CD:

$$H = \frac{Q_{AB}^2 l_{AB}}{K_{AB}^2} + \frac{Q_1^2 l_1}{K_1^2} + \frac{Q_{CD}^2 l_{CD}}{K_{CD}^2} = h_{\text{э}\,AD}. \qquad (18\text{-}19)$$

По причинам, указанным выше, эта система уравнений решается просто лишь для квадратичного режима. В этом случае из уравнения (18-16) определяем Q_2 и Q_3 через Q_1. Затем выражаем Q_{AB} и Q_{CD} через Q_1 и эти значения представляем в уравнение (18-19), откуда и находим Q_1.

После определения расходов можно определить на каждом участке потери удельной энергии и построить энергетические линии, что сделано на фиг. 18-3 для магистральной линии $ABICD$. Пьезометрическая линия соответствует избыточному давлению.

Расчет для квадратичного режима можно было бы также произвести, вводя в расчетные уравнения коэффициенты характеристик соответствующих трубопроводов. При этом уравнения (18-16) и (18-19) надо было бы заменить следующими:

$$a_1 Q_1^2 = a_2 Q_2^2 = a_3 Q_3^2; \qquad (18\text{-}20)$$

$$H = (aQ^2)_{AB} + a_1 Q_1^2 + (aQ^2)_{CD} = h_{\text{э}\,AD}. \qquad (18\text{-}21)$$

Определение расходов в этом случае можно упростить, если заменить разветвление одним трубопроводом с расходом $Q_{123} = Q_1 + Q_2 + Q_3$, коэффициент характеристики которого определим по формуле (17-20)

$$a_{123} = \frac{a_1 a_2 a_3}{(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \sqrt{a_2 a_3})^2}. \qquad (18\text{-}22)$$

В этом случае вместо (18-21) будем иметь уравнение

$$H = (aQ^2)_{AB} + a_{123}(Q_{AB} - Q_B)^2 + a_{CD}(Q_{AB} - Q_B - Q_C)^2, \qquad (18\text{-}23)$$

откуда при заданных H и узловых расходах сначала найдем Q_{AB}, а затем из уравнений (18-17), (18-18), (18-20) и (18-21) — и другие расходы.

Точно этот случай может быть решен только графоаналитически. Для этого строим характеристики (фиг. 18-4) для каждого участка трубопровода по формулам вида (17-17). Характеристики трубопроводов *1*, *2* и *3* складываются по методу параллельного сложения. Для построения характеристик всей

Фиг. 18-4. Схема графоаналитического способа расчета разветвленного водопровода.

системы начало характеристики параллельных трубопроводов *1*, *2* и *3* надо сдвинуть вправо на Q_B. Начало характеристики участка CD надо сдвинуть вправо на $(Q_B + Q_C)$.

Полученные таким образом характеристики складываются по методу последовательно работающих трубопроводов. Общий расход и расходы по каждому участку определяются, как показано на фигуре.

18-3. Водопровод с равномерным путевым расходом

Во многих случаях приходится рассчитывать такие водопроводные линии, в которых вода расходуется равномерно по длине в большом количестве пунктов. Такой случай водопровода и носит название водопровода с равномерным путевым расходом (фиг. 18-5).

Для расчета такого водопровода оказывается возможным с достаточной для практики точностью полагать, что разбор воды в пути осуществляется не только равномерно, но и непрерывно с интенсивностью путевого расхода q [*л/сек*] на 1 *пог. м*.

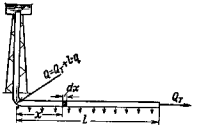
В общем случае, кроме путевого расхода, данный участок пропускает некоторый транзитный расход Q_m, следующий на участки, примыкающие к рассматриваемому.

Общий расход в начальном сечении участка будет равен сумме транзитного расхода Q_m и путевого $Q_n = ql$, т. е.

$$Q = Q_m + ql.$$

Определим потерю удельной энергии на участке l. Для этого рассмотрим сначала элемент участка dx, расположенный на расстоянии x от начала.

Через рассматриваемый элемент проходит весь транзитный расход Q_m, а также та часть путевого расхода, которая следует на участок длиной $(l-x)$.



Фиг 18-5. Схема водопровода с путевым расходом.

Таким образом, в рассматриваемом сечении расход будет равен:

$$Q_x = Q_m + (l-x)q.$$

Для определения потери удельной энергии на участке воспользуемся формулой (18-10), представив ее в виде:

$$dh_э = \frac{[Q_m + (l-x)q]^2}{K^2}\,dx.$$

Общая потеря энергии на участке длиной l будет равна интегралу

$$h_э = \int_0^l \frac{[Q_m + (l-x)q]^2}{K^2}\,dx.$$

Интеграл легко находится только для квадратичного режима.

В этом случае $K = \text{const}$. Имея, кроме того, в виду, что

$$Q_n = ql,$$

получим.

$$h_э = \frac{l}{K^2}\left(Q_m^2 + \frac{Q_n^2}{3} + Q_m Q_n\right). \qquad (18\text{-}24)$$

Таким образом, *при наличии, кроме путевого расхода, еще и транзитного смешанное питание при квадратичном режиме эквивалентно питанию, сосредоточенному на конце данного участка, с расходом, равным:*

$$Q_э = \sqrt{Q_m^2 + \frac{Q_n^2}{3} + Q_m Q_n}. \qquad (18\text{-}25)$$

В том случае, если транзитный расход отсутствует,

$$h_э = \frac{Q_n^2 l}{3K^2}. \qquad (18\text{-}26)$$

Таким образом, *при отсутствии транзитного расхода непрерывное питание при квадратичном режиме эквивалентно питанию, сосредоточенному на конце данного участка, с расходом, равным:*

$$Q_э = \frac{1}{\sqrt{3}}\,Q_n. \qquad (18\text{-}27)$$

Заметим, что вследствие уменьшения скорости движения жидкости по длине трубопровода будет происходить также и восстановление давления, частично компенсирующее его падение, обусловленное гидравлическими сопротивлениями.

18-4. Задача о трех резервуарах

Сложный водопровод, осуществляющий питание одного резервуара из двух резервуаров или двух резервуаров из одного, показан на фиг. 18-6—18-12.

Та или иная схема работы разбираемого водопровода будет зависеть от соотношений гидродинамического напора.

Схема I. Жидкость движется в направлениях, как показано на фиг. 18-7, если

$$h_1 > h_B > h_3;\ h_B > h_2.$$

В этом случае резервуар A оказывается питающим резервуаром, а C и D — питаемыми.

Схема II. Жидкость движется в направлении, как показано на фиг. 18-8, если

$$h_1 > h_B > h_3;$$

$$h_2 > h_B.$$

В этом случае резервуары A и D будут питающими, резервуар C — питаемым.

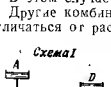
Фиг 18-6. Схема водопровода с тремя водонапорными башнями

Схема III (простой трубопровод). Жидкость движется в направлении, как показано на фиг. 18-9, если

$$h_1 > h_B > h_3;\ h_2 = h_B$$

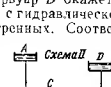
В этом случае резервуар D окажется бездействующим.

Другие комбинации с гидравлической точки зрения не будут отличаться от рассмотренных. Соответственно той или иной



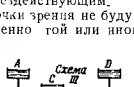
Фиг. 18-7. Схема потока в водопроводе с тремя башнями.

Резервуар A питает резервуары C и D.



Фиг. 18-8. Схема потока в водопроводе с тремя башнями.

Резервуары A и D питают резервуар C.



Фиг. 18-9. Схема потока в водопроводе с тремя башнями.

Резервуар A питает резервуар C. Резервуар D не работает.

схеме будет иметься и соответствующее распределение потока. Если обозначить расход на участке AB через Q_A, на участке BC — Q_C, на участке BD — Q_D, получим следующие зависимости между расходами:

Схема I	Схема II	Схема III
$Q_A = Q_D + Q_C$ $Q_A > Q_C$	$Q_A = Q_C - Q_D$ $Q_A < Q_C$	$Q_D = 0$ $Q_A = Q_C$

Полученные три зависимости позволят определить условия существования той или иной схемы в зависимости от диаметров труб, длин участков и напоров h_1, h_2 и h_3, т. е. в зависимости от величин, которые обычно бывают известны.

Воспользуемся формулой

$$Q^2 = K^2 \frac{h}{l} \quad \text{или} \quad Q^2 = \frac{h}{a}$$

Применительно к соответствующей схеме будем иметь:

Схема I

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_B}{l_{AB}} > K_{BC}^2 \frac{h_B - h_3}{l_{BC}}$$

Так как в этом случае $h_B > h_2$, то неравенство не нарушится от замены h_B на h_2. Получим, что

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_2}{l_{AB}} > K_{BC}^2 \frac{h_2 - h_3}{l_{BC}}.$$

Схема II

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_B}{l_{AB}} < K_{BC}^2 \frac{h_B - h_3}{l_{BC}}.$$

В этом случае уже $h_2 > h_B$ и поэтому неравенство также не нарушится от замены h_B на h_2. Найдем, что

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_2}{l_{AB}} < K_{BC}^2 \frac{h_2 - h_3}{l_{BC}}.$$

Схема III

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_B}{l_{AB}} = K_{BC}^2 \frac{h_B - h_3}{l_{BC}}$$

В этом случае $h_B = h_2$ и поэтому

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_2}{l_{AB}} = K_{BC}^2 \frac{h_2 - h_3}{l_{BC}}.$$

Полученные условия можно объединить в следующее:

$$K_{AB}^2 \frac{h_1 - h_2}{l_{AB}} \gtreqless K_{BC}^2 \frac{h_2 - h_3}{l_{BC}} \quad \begin{cases} > \text{— I схема;} \\ < \text{— II схема;} \\ = \text{— III схема,} \end{cases} \tag{18-28}$$

где, как следует из вывода,

$$h_1 > h_2 > h_3.$$

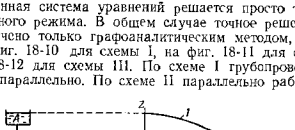
Следует обратить внимание, что водопровод будет работать по той или другой схеме в зависимости не только от значений напоров h_1, h_2 и h_3, но также и в зависимости от соответствующих значений модулей расхода $K^2 = \frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}$ и в зависимости от длин участков. В то же время при существовании неравенств $h_1 > h_2 > h_3$ ни длина, ни модуль расхода участка BD никакого влияния на схему работы водопровода не оказывают. Влияние этих величин лишь скажется на пропускной способности всей системы.

Считая заданными h_1, h_2, h_3, l_{AB}, l_{BC}, l_{BD}, d_{AB}, d_{BC} и d_{BD}, определение соответствующих потерь напора и расходов может быть произведено по следующим формулам, образующим систему уравнений (см. таблицу), в которые введены коэффициенты характеристик трубопроводов.

Таблица расчетных формул задачи о трех резервуарах

Участок	Схема I	Схема II	Схема III
AB	$h_1-h_B=a_{AB}Q_A^2$		
BC	$h_B-h_3=a_{BC}Q_C^2$		
BD или DB	$h_B-h_2=a_{BD}Q_D^2$	$h_2-h_B=a_{BD}Q_D^2$	—
Зависимость между расходами	$Q_A=Q_C+Q_D$	$Q_C=Q_A+Q_D$	$Q_A=Q_C$
Неизвестные	h_B, Q_A, Q_C и Q_D		h_B и $Q_A=Q_C$

Полученная система уравнений решается просто только для квадратичного режима. В общем случае точное решение может быть получено только графоаналитическим методом, как показано на фиг. 18-10 для схемы I, на фиг. 18-11 для схемы II и на фиг. 18-12 для схемы III. По схеме I трубопроводы *2* и *3* работают параллельно. По схеме II параллельно работают тру-



Фиг. 18-10. Графоаналитический способ расчета водопровода с башнями.

Точка F определяет расход в трубопроводе *1*, точка n — в трубопроводе *2* и точка m — в трубопроводе *3*.

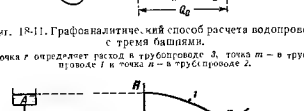
бопроводы *1* и *2*. Следует обратить внимание, что по схеме I характеристика трубопровода *3* пересекает характеристику трубопровода *1* в точке, расположенной выше уровня резервуара D, а по второй схеме ниже. Случай расположения точки пересечения характеристик на уровне резервуара D будет соответствовать третьей схеме (в этом случае расчет можно произвести и точно так, как указано в § 17-5). Этими признаками полезно руководствоваться, проверяя неравенства (18-28).

Следует обратить внимание, что в том случае, если расходы на отдельных участках известны, а требуется определить соог-

ветствующие диаметры труб, то задача теряет свою определенность ввиду того, что возможно значительное число вариантов, которые удовлетворяют гидравлическим требованиям. В этом случае при подборе диаметров приходится считаться с экономи-

Фиг. 18-11. Графоаналитический способ расчета водопровода с тремя башнями.

Точка F определяет расход в трубопроводе *3*, точка m — в трубопроводе *1* и точка n — в трубопроводе *2*.



Фиг. 18-12. Графоаналитический способ расчета водопровода с тремя башнями.

Точка F определяет расход в трубопроводах *1* и *3*. Расход в трубопроводе *2* равен нулю.

ческими соображениями, допускаемыми скоростями движения жидкости в трубах и требуемыми свободными напорами на концах. Метод подбора диаметров труб для задач отмеченного типа будет показан на соответствующем примере (задача 18-1).

Задача 18-1. Рассчитать водопроводную сеть завода (фиг. 18-13). Напор в начале сети принять равным $H_A=30$ *м*, а шероховатость трубопроводов $\Delta=0{,}5$ *мм*.

Решение.

Принимаем необходимый напор на концах сети в пунктах C, E, F, M равным $H=20$ *м*.

В данном расчете предполагаем в различных пунктах пожар, поэтому к потребному количеству воды (табл. А) следует прибавить: а) 20 *л/сек* в пункте F при расчете участка DF, в пункте C — при расчете участка BC, в пункте E — при расчете участка DE, б) 10 *л/сек* в пункте M при расчете участка DM при одновременном пожаре в пункте F с подачей 10 *л/сек*.

В соответствии с данными табл. А с учетом пожара расход воды на каждом участке определится суммированием соответствующих расходов и выразится цифрами, приведенными в табл. Б.

Таблица А

Потребление воды заводом

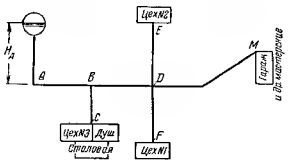
Наименование объекта	Суточный расход, *м*	В какие часы суток	Расход в секунду, *м*	Наименование объекта	Суточный расход, *м*	В какие часы суток	Расход в секунду, *м*
Цех № 1 . . .	360 000	6—20	7,15	Гараж и другие мастерские	80 000	6—20	1,58
„ № 2 . . .	135 000	6—20	2,68	Душ	97 500	6—20	1,93
„ № 3 . . .	100 000	6—20	2,00				
Столовая . . .	25 000	6—20	0,50				

Таблица Б

Наименование участка	*AB*	*BC*	*BD*	*DE*	*DF*	*DM*
Расход, *л/сек*	35,84	24,43	31,41	22,68	27,15	11,58

Переходим к определению диаметров. Ориентировочно предполагают, что потеря напора вдоль главной магистрали AF происходит равномерно. На этом основании определяют среднюю допускаемую потерю напора на 1 *пог. м* этого участка (т. е. гидравлический уклон) по формуле

$$J_{cp} = \frac{H_A - H_F}{l_{AF}}.$$



Фиг. 18-13. Схема водопроводной сети. К задаче 18-1.

После этого приступают к подбору диаметров различных участков, пользуясь формулой

$$Q = K\sqrt{J}.$$

Зная, например, расход Q_{AB} на участке AB, определяют величину требующегося модуля расхода K^2 для данного участка

$$K^2_{AB} = \frac{Q^2_{AB}}{J_{cp}}.$$

имея в виду, что

$$K^2 = \frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda}.$$

Для определения d, предполагая квадратичный режим движения, воспользуемся уже готовыми данными табл. 18-1, выбрав по соответствующему значению K^2 ближайший диаметр трубы.

Итак, в данном случае мы имеем:

$$\frac{H_A - H_F}{l_{AF}} = \frac{30 - 20}{900} = 0{,}0011;$$

$$K^2_{AB} = \frac{Q^2_{AB}}{J_{cp}} = 116\,727.$$

Этому значению K^2 согласно табл. 18-1 соответствует диаметр, лежащий между $d = 0{,}159$ *м* и $d = 0{,}205$ *м*.

Останавливаемся на $d = 0{,}205$ *м*.

Этому диаметру соответствует $K^2 = 177\,340$.

Благодаря тому, что диаметр трубы нами выбран больше расчетного на участке AB потери будут меньше, чем предполагалось ранее. Действительная потеря напора на участке AB определится по формуле

$$h_{д\,AB} = \left(\frac{Q^2 l}{K^2}\right)_{AB} = \frac{35{,}84^2 \cdot 400}{177\,340} = 2{,}9 \text{ м}.$$

Действительный напор, имеющийся в точке B, равен

$$H_B = H_A - h_{д\,AB} = 30 - 2{,}9 = 27{,}1 \text{ м}.$$

Аналогично предыдущему определяем диаметры труб и на прочих участках, каждый раз исходя из допускаемой для данного участка потери напора.

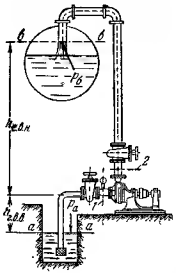
Результаты вычислений сводим в табл. В.

Таблица В

№ п. п.	Наименование участков	Длина участка, *м*	Расход на участке Q, *л/сек*	Напор в начале участка, *м*	Требуемый напор в конце участка, *м*	Допускаемая потеря напора, *м*	Средний гидравлический уклон	Расчетный модуль, $(дм^3/сек)^2$	Принятый диаметр трубы, *м*	Табличный модуль, $(дм^3/сек)^2$	Действительная потеря напора, *м*	Напор в конце участка действительный, *м*
1	*AF*	900		30	20	10	0,0011	—	—	—	—	—
2	*AB*	400	35,84	30	—		0,0011	115 606	0,205	177 340	2,90	27,10
3	*BC*	600	24,43	27,10	20	7,10		54 430	0,205	177 340	2,[illegible]2	25,08
									0,158	44 807	7,99	19,11
4	*BD*	200	31,41	27,[illegible]	—	—	0,0011	88 793	0,205	177 340	1,[illegible]1	25,99
5	*DE*	400	22,68	25,99	20	5,99	—	34 349	0,158	44 807	4,50	21,40
6	*DF*	300	27,[illegible]	25,99	20	5,99	—	36 917	0,158	44 807	4,93	21,06
7	*D*	800	11,58	25,99	20	5,99	—	17 909	0,131	10 658	6,44	19,55

18-5. Гидроэнергетический баланс насосной установки

До сих пор рассматривались такие потоки, в которых происходила только потеря энергии жидкости. В настоящем параграфе рассматривается случай насосной установки (фиг. 18-14). В этом случае в систему трубопроводов, направляющих поток, включается насос. Его основное назначение — сообщать жидкости необходимую дополнительную мощность (эффективную мощность) $N_{эфф}$ для того, чтобы обеспечить движение ее по заданным трубопроводам в требуемом количестве. Эффективная мощность, отнесенная к единице весового расхода насоса (производительность насоса) γQ [кГ/сек], называется эффективным напором насоса или просто напором насоса и обозначается через



Фиг. 18-14. Схема насосной установки.

$h_{г.в.н.}$ — геометрическая высота нагнетания.

$$H_{эфф} = \frac{N_{эфф}}{\gamma Q}. \qquad (18\text{-}29)$$

Мощность, которую двигатель подводит к насосу, больше $N_{эфф}$, так как часть мощности затрачивается на преодоление гидравлических и механических сопротивлений как в самом насосе, так и в приводном механизме. Этот вопрос подробно изучается в курсе насосов.

Если обозначить к. п. д. насоса через η, а к. п. д. привода через $\eta_п$, то мощность двигателя, например мощность на валу электромотора, вычисляется по формуле

$$N_{дв} = \frac{N_{эфф}}{\eta\eta_п} = \frac{\gamma Q H_{эфф}}{\eta\eta_п} \quad [кГм/сек]. \qquad (18\text{-}30)$$

Из определения следует, что $H_{эфф}$ измеряется в метрах столба перекачиваемой жидкости.

Таким образом, напор насоса $H_{эфф}$ следует рассматривать как дополнительное количество удельной энергии (удельной мощности), которая воспринимается каждым килограммом жидкости, протекающей через насос.

Поэтому напор насоса можно определить как разность удельных энергий E_2 в напорном и E_1 во всасывающем патрубках насоса:

$$H_{эфф} = E_2 - E_1. \qquad (18\text{-}31)$$

Введем в рассмотрение элементы всасывающей и напорной линии. Для этого при помощи уравнения Бернулли составим два уравнения, представив их в таком виде

для всасывающей линии

$$E_1 = z_a + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha_a v_a^2}{2g} - \sum\left(\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{Q^2}{2g\omega_{вс}^2},$$

для напорной линии

$$E_2 = z_б + \frac{p_б}{\gamma} + \frac{\alpha_б v_б^2}{2g} + \sum\left(\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{Q^2}{2g\omega_{нап}^2}.$$

Подставляя значения E_1 и E_2 в уравнение (18-31), получим:

$$H = (h_{г.в.в} + h_{г.в.н}) + \frac{p_б - p_a}{\gamma} + \frac{\alpha_б v_б^2 - \alpha_a v_a^2}{2g} +$$
$$+ \sum\left(\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{Q^2}{2g\omega_{вс}^2} + \sum\left(\lambda\frac{l}{d} + \Sigma\zeta\right)\frac{Q^2}{2g\omega_{нап}^2}, \qquad (18\text{-}32)$$

где сумма двух первых членов равна общей высоте подъема жидкости, а сумма двух последних равна потерям удельной энергии во всасывающем и напорном трубопроводах. В частном случае может оказаться, что $v_б = v_a = 0$, а $p_б = p_a$.

Из уравнения следует, что в условиях установившегося движения требующийся от насоса напор необходим: 1) для подъема жидкости с уровня всасывания на уровень нагнетания, 2) для преодоления разности давлений на поверхности нагнетания и всасывания; 3) на создание разности скоростных напоров на конце напорной и всасывающей линии, 4) на преодоление гидравлических сопротивлений во всасывающем и напорном трубопроводах. Полученное выражение напора является самым общим. В частных случаях некоторые члены этого выражения могут быть равны нулю.

18-6. Элементы экономического расчета трубопровода

При заданном расходе жидкости Q [л/сек] выбор скорости течения жидкости v [дм/сек] определяет диаметр трубопровода d. Между тем, выбор диаметра имеет большое экономическое значение, потому что если взять трубу излишне большого диаметра, то увеличится стоимость трубопровода, который составляет главную часть стоимости сооружения. Если принять трубу малого диаметра (что соответствует большей скорости), то хотя величина первоначальных затрат на трубопровод и уменьшится, но зато вследствие большего гидравлического сопротивления придется сооружать более высокие водонапорные башни и резервуары (а значит, и более дорогие), а если подача жидкости осуществляется насосами, иметь более мощные насосы и затрачивать больше энергии на транспортировку жидкости, что может иногда оказаться неэкономичным.

За экономичный диаметр трубопровода следует принять такой, при котором общая стоимость сооружения всей системы (трубопроводов, напорных башен и насосных станций) и стоимость ее эксплуатации (куда должна войти стоимость содержания персонала, ремонта, стоимость затрачиваемой энергии, амортизационные отчисления за полное время эксплуатации) были бы наименьшими. При этом полное время эксплуатации — это время, в течение которого происходит „моральный" износ установки. Это время обычно устанавливается в законодательном порядке.

Произведем элементарный экономический расчет для трех трубопроводов диаметром 158, 205 и 257 *мм*, каждый из которых должен пропускать один и тот же расход $Q = 30$ *л/сек* воды. Примем стоимость 1 *квтч* электроэнергии равной 10 коп., а к. п. д. насосной установки $\eta = 0{,}67$. В год трубопровод работает $t_г = 7200$ час. Результаты расчета приведены в табл. 18-2.

Из полученного расчета следует, что при укладке трубопровода $d = 1{,}58$ *дм* экономия по сравнению с $d = 2{,}05$ *дм* на первоначальных затратах будет 9 тыс. руб. на 1 *км*. Зато перерасход на эксплуатацию ежегодно выразится в сумме 5 159 руб., главным образом за счет стоимости перерасходованной электроэнергии (5 709 руб. в год). Экономия в 801 руб. на общих годовых расходах при укладке трубопровода $d = 2{,}57$ *дм* по сравнению с трубопроводом $d = 2{,}05$ *дм* покроет перерасход на стоимости укладки 9 000 руб. только через 12 лет.

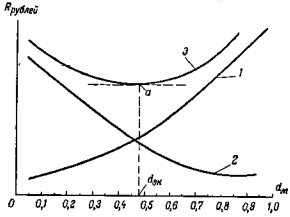
Таблица 18.2

Таблица подсчетов к определению экономического диаметра трубопровода

Диаметр трубопровода, *дм*	1,58	2,05	2,57
Средняя скорость движения v, *м/сек*	1,53	0,900	0,579
Ориентировочная стоимость укладки 1 *км* трубопровода, руб	40 000	49 000	58 000
Амортизационные отчисления и стоимость ремонта из расчета 6% в год к первоначальной стоимости, руб	2 400	2 940	3 480
Потери удельной энергии на 1 *км* согласно табл. 18-2 для 1 $n = 80$ $h_n = \frac{Q^2 l}{K^2}$, *м* вод. ст.	24,06	6,05	1,82
Стоимость потерянной энергии, руб $R = \frac{\gamma Q h_n}{102\eta} ts$	7 627	1 918	577
Общая годовая сумма стоимости энергии и отчислений	10 027	4 858	4 057

Поэтому, если время морального износа установки T будет больше 12 лет, экономичным диаметром будет $d = 2{,}57$ *дм*.

При $T = 12$ лет — варианты с $d = 2{,}05$ *дм* и $d = 2{,}57$ *дм* будут равноценны, при $T < 12$ лет экономичным диаметром будет $d = 2{,}05$ *дм*.



Фиг. 18.15. Горизонтальная касательная к линии общей стоимости в точке касания определяет экономичный диаметр.

Определение экономичного диаметра трубопровода лучше всего произвести графоаналитически. Для этого надо построить (фиг. 18.15) график *1* зависимости общей стоимости сооружения в функции диаметра трубопровода и график *2* — стоимости эксплуатации (включая и все виды отчислений) также в функции диаметра трубопровода. Полная стоимость сооружения изобразится суммарным графиком *3*. Экономичный диаметр будет соответствовать минимуму кривой *3*.

К вопросу определения экономичного диаметра трубы можно было бы подойти и аналитически, хотя в общем виде аналитическое решение представляет известные трудности.

При определении стоимости укладки $l_м$ трубопроводов будем пользоваться предлагаемой нами формулой.

$$R_1 = lbd^m.$$

В этой формуле[1] коэффициенты b и m имеют значение в зависимости от глубины укладки трубы в грунт и характера грунта, а d — диаметр трубы.

Например, при укладке чугунных труб в сухом грунте на глубину 3 *м* эти коэффициенты (если диаметр выражать в дециметрах) имели значения:

для $1{,}5 \leq d \leq 3{,}5$ *дм* $b = 29$, а $m = 0{,}775$,
для $3{,}5 \leq d \leq 10$ *дм* $b = 12{,}8$, а $m = 1{,}42$,

что с достаточной точностью соответствовало стоимости укладки труб, приведенной в табл. 18.3.

Таблица 18.3

Стоимость укладки 1 *м* чугунных труб в сухом грунте на глубину 3 *м*

Диаметр, *дм*	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
Стоимость, руб.	40	49	58	69	77	95	106	128	156	200	241	291	341

Если k — число годовых процентов на амортизационные отчисления включающие проценты на капитальный ремонт[2], то за T лет эксплуатации сумма амортизационных отчислений будет равна

$$R_2 = \frac{kT}{100} lbd^m.$$

Потери удельной энергии могут быть определены по формуле

$$h_n = \frac{Q^2 l}{K^2} = \frac{8\lambda}{\pi^2 g} \frac{Q^2 l}{d^5} = 0{,}00827 \frac{Q^2 l}{d^5} \lambda \ [м],$$

где Q [*дм³/сек*], d [*дм*], а l [*м*].

Полная потеря энергии в киловаттчасах за t час. эксплуатации за T лет

$$W = \frac{\gamma Q h_n}{102\eta} t = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-5}}{\eta} \cdot \frac{Q^3 l}{d^5} \gamma \lambda l \ [квтч],$$

где γ [*кГ/дм³*], а η — к. п. д. насосной установки.

[1] Эта формула была предложена автором еще в 1939 г. См. Д. Л. Гурвич и Н. З. Френкель, Гидравлика, 1940, стр. 258.

[2] Постановление Совета Народных Комиссаров Союза ССР от 8 января 1938 г. „Об использовании амортизационных отчислений и об улучшении ремонта в промышленных предприятиях".

Принимая стоимость 1 *квтч* s руб., найдем, что стоимость потерянной энергии будет

$$R_3 = \frac{8{,}1\cdot 10^{-5}}{\eta}\frac{Q^3 l}{d^5}\gamma\lambda t s \text{ руб}$$

Полная стоимость сооружения, включая отчисления и стоимость энергии, затраченной на преодоление гидравлических сопротивлений, будет равна

$$R = lbd^m\left(1+\frac{kT}{100}\right)+\frac{Q^3}{d^5}\frac{8{,}1\cdot 10^{-5}}{\eta}\gamma\lambda s l t.$$

Для экономических расчетов и для квадратичных режимов вполне допустимо для коэффициента λ принять зависимость (14-54).

Экономичный диаметр найдем, приравняв нулю производную от R по диаметру

$$\frac{dR}{d(d)} = lbmd^{m-1}\left(1+\frac{kT}{100}\right)-\frac{8{,}1\cdot 10^{-5}}{\eta}(5+\nu)\gamma a t s l\frac{Q^3}{d^{6+\nu}} = 0,$$

откуда

$$d_{эк} = \sqrt[5+m+\nu]{\frac{8{,}1(5+\nu)}{\left(1+\frac{kT}{100}\right)10^5}\cdot\frac{\gamma a t s}{\eta b m}}\,Q^{\frac{3}{5+m+\nu}} \qquad (18\text{-}33)$$

Зная экономичный диаметр, легко получить формулу и для экономичной скорости

$$v_{эк} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi}\sqrt[\frac{m+\nu+5}{2}]{\frac{\left(1+\frac{kT}{100}\right)10^5}{(5+\nu)8{,}1}\frac{\eta b m}{\gamma a t s}}\,Q^{\frac{m+\nu}{m+\nu+5}} \qquad (18\text{-}34)$$

Глава девятнадцатая

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

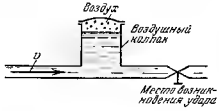
19-1. Определение гидравлического удара

Выдающуюся роль в исследовании гидравлического удара сыграла работа основоположника этой теории Н. Е. Жуковского «О гидравлическом ударе в трубах»[1]. Со времени опубликования этой работы развитие теории гидравлического удара шло по пути, указанному Н. Е. Жуковским. Большой вклад в развитие теории гидравлического удара был внесен итальянским инженером Л. Аллиеви, получившим так называемые «цепные уравнения», используемые в настоящей главе. Из фундаментальных работ советских ученых следует отметить работы Н. А. Картвелишвили, А. А. Морозова, М. А. Мосткова, А. А. Сурина, И. А. Чарного и др.

[1] Н. Е. Жуковский, О гидравлическом ударе в трубах, Бюллетень Политехнического общества, 1899, № 5, стр. 255–290.

Гидравлическим ударом называется комплекс явлений, происходящих в капельной жидкости при резком уменьшении ее скорости движения, благодаря чему в жидкости возникает колебательный затухающий процесс, сопровождающийся чередующимся резким повышением и понижением давления.

Удар происходит и тогда, когда в покоящейся жидкости, находящейся в трубопроводе, закрытом только с одной стороны (гидравлический тупик), внезапно создается давление у открытого конца. Это приложенное давление в виде удара распространяется по трубопроводу. В начальной стадии удара одновременно с распространением по длине трубопровода приложенного давления приходит в движение вследствие сжатия заключенная в трубопроводе жидкость. Вторичное повышение давления происходит после того, как жидкость, пришедшая в движение, вынуждена будет начать останавливаться ввиду того, что трубопровод в конце тупика перекрыт. Такой случай удара происходит в трубопроводах, подводящих топливо от топливных насосов к форсункам бескомпрессорных двигателей или в тупиковых трубопроводах водопроводных систем.



Фиг. 19-1. Воздушный колпак локализует распространение гидравлического удара.

Колебательный процесс изменения давления возникает и при внезапном открытии задвижки, т. е. при быстром сообщении жидкости скорости, что вызывает уменьшение давления. В тех случаях, в которых явление удара не используется, а его действие вредно отражается на нормальной работе трубопровода или на его прочности, система должна быть оборудована устройствами, которые не позволили бы осуществить мгновенное уменьшение скорости (запорные устройства вентильного типа), или должны быть установлены приспособления, которые ограничивали бы распространение удара (например, воздушные колпаки, как показано на фиг. 19-1). Воздушный колпак локализует распространение удара, если трубопровод прерывается колпаком. Гидравлический удар используется в водоподъемном механизме — гидравлическом таране.

19-2. Формула Н. Е. Жуковского для давления при мгновенном закрытии задвижки

Процесс изменения давления в жидкости при перекрытии трубопровода осуществляется следующим образом. Сначала повышается давление в остановившемся слое жидкости непосредственно у закрытой задвижки. Остановка жидкости и повышение

давления в трубопроводе происходят постепенно от слоя к слою. Одновременно с постепенной остановкой отдельных слоев в остановившихся слоях происходит увеличение давления. Таким образом, возникшая у задвижки волна повышения давления, или ударная волна, распространяется по трубопроводу длиною l к его открытому концу.

Скорость распространения ударной волны, если трубопровод и жидкость по длине одинаковы, будет постоянна; обозначим ее через a. Через время $t = \frac{l}{a}$, в течение которого ударная волна достигнет открытого конца трубопровода, вся жидкость в трубопроводе остановится.

Так как емкость, к которой присоединен трубопровод, велика, то явление удара на жидкость в емкости не распространится. Поэтому к моменту подхода ударной волны к началу трубопровода у емкости создается граница, на которой соприкасаются две среды: первая среда — жидкость в емкости, находящаяся в нормальном состоянии, вторая среда — жидкость в трубопроводе, находящаяся в сжатом состоянии. Совершенно очевидно, что сжатая в трубопроводе жидкость не может оставаться там в состоянии покоя. Как сжатая пружина, свободная с одного конца, жидкость в трубопроводе начнет перемещаться в сторону емкости, приобретая при этом в том же направлении и скорость. Благодаря этому начинается спад давления, который будет распространяться уже от резервуара в сторону задвижки. Причем вместе со спадом давления будет приходить в движение жидкость в трубопроводе со скоростью, направленной в сторону, противоположную начальной. Явление происходит так, как если бы у свободного конца в тот самый момент, когда к нему подошла волна повышения давления, возникла вторая волна — волна понижения давления. Эта волна перемещается в направлении к задвижке с той же скоростью a и гасит давление, которое создала первая ударная волна. Когда волна понижения давления ко времени T

$$T = \frac{2l}{a}, \tag{19-1}$$

называемом фазой удара, достигнет закрытой задвижки, вся масса жидкости будет иметь начальное давление и скорость, направленную к резервуару. Ввиду последнего обстоятельства жидкость в трубопроводе в дальнейшем будет стремиться оторваться от задвижки. Вследствие этого давление у задвижки, ставшее начальным, при подходе волны гашения будет продолжать падать, становясь меньшим того, чем оно было до удара. Падение давления прекратится, когда слой жидкости у задвижки, «разжавшись» вследствие падения давления, остановится. После этого произойдет падение давления у смежного слоя и его остановка. Падение давления, сопровождающееся остановкой слоев жидкости, будет распространяться в сторону резервуара. Явление может быть описано так, как если бы у задвижки возникла третья волна — волна снижения давления до значений, ниже нормального.

Когда волна снижения достигнет резервуара, в этот момент $\left(3t = \frac{3l}{a}\right)$ вся жидкость в трубопроводе будет неподвижна и иметь пониженное давление. В этом состоянии жидкость в трубопроводе не может оставаться в покое. Так как давление в резервуаре больше, чем давление в трубопроводе, то вследствие своей упругости жидкость начнет перемещаться, но теперь уже от открытого конца в сторону задвижки. При этом в трубопроводе начнется процесс восстановления начального давления и начальной скорости.

Явление будет происходить так, как если бы у открытого конца трубопровода возникла четвертая волна — волна восстановления начальной скорости и начального давления. Поэтому, когда волна восстановления ко времени $2T = \frac{4l}{a}$ достигнет задвижки, во всем трубопроводе будут восстановлены и начальная скорость и начальное давление. Но так как задвижка продолжает оставаться закрытой, а жидкость движение свое продолжать не может, то у задвижки вновь возникает удар.

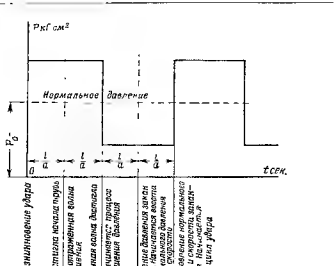
Если пренебречь рассеянием (диссипацией) энергии потока, обусловленной работой сил трения и деформацией трубопровода, то вновь возникший удар будет повторять предыдущий. Удар будет иметь периодический характер. В этом случае колебательный процесс будет продолжаться бесконечно долго, а давление у задвижки в зависимости от времени будет изменяться так, как показано на фиг. 19-2. Такой удар называется прямым.

Для определения величины давления, которое возникает при ударе в случае мгновенного перекрытия задвижки, рассмотрим явление у задвижки. За время dt после возникновения удара прекратится движение жидкости и возрастет давление только на длине $dl = a\,dt$ (фиг. 19-3), где a — скорость волны.

В потоке левее сечения A еще будут начальное давление p и начальная скорость v. У задвижки (в сечении B) давление будет равно давлению удара; часть трубопровода будет деформирована, как показано пунктиром.

Воспользуемся уравнением Эйлера (8-28), распространив его на поток аналогично тому, как это было сделано в § 10-6. Для горизонтального трубопровода (z = const) будем иметь:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{\beta}{g}\frac{dv}{dt}. \tag{19-2}$$

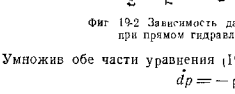


Фиг 19-2 Зависимость давления у задвижки при прямом гидравлическом ударе.

Умножив обе части уравнения (19-2) на $dt = adt$, получим:

$$dp = -\beta\rho a dv.$$

Пренебрегая перемещением частиц за время удара, можно рассматривать dv как изменение скорости в некотором живом сечении, т. е. отнести это изменение к точке поля. Таким образом, интегрирование надо произвести в пределах от p до $p_{уд}$ и от v до 0. При этом получим



Фиг 19 3 Пунктиром показано расширение трубопровода, вызванное ударом

$$p_{уд} - p = \beta\rho a. \quad (19\text{-}3)$$

Это и есть формула Н. Е. Жуковского[1].

В том случае, если бы скорость упала с v до v', при неполном мгновенном закрытии формула имела бы следующий вид:

$$p_{уд} - p = \beta\rho a(v - v') \quad (19\text{-}4)$$

[1] В формуле (19-3) Н. Е. Жуковский принимал $\beta = 1$. (Этот вопрос в настоящее время является дискуссионным.)

19-3. Скорость распространения ударной волны в жидкости по Н. Е. Жуковскому

Для определения скорости распространения ударной волны a рассмотрим отсек объемом $dW = \omega a dt$, ограниченный сечением, находящимся от задвижки на расстоянии $dl = adt$. За время dt, в течение которого давление в жидкости увеличится на dp, этот объем станет больше вследствие деформации трубопровода на величину $dld\omega$, где ω — площадь сечения трубопровода. Вместе с давлением увеличивается и плотность жидкости на $d\rho$. Это вызывает уменьшение объема жидкости, находившейся в начальном объеме, на величину $\frac{d\rho}{\rho}\omega dl$.

В результате расширения объема рассматриваемого отсека и сжатия находившейся там жидкости образуется пространство, в которое за время удара dt втечет дополнительный объем жидкости $v\omega dt$. Этот объем может быть приравнен двум, ранее вычисленным:

$$v\omega dt = dld\omega + \frac{d\rho\omega dl}{\rho},$$

откуда следует:

$$v = a\frac{d\omega}{\omega} + a\frac{d\rho}{\rho}, \quad (19\text{-}5)$$

где $\frac{dl}{dt} = a$;

$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_c dp = \frac{1}{K}dp$ согласно формуле (2 32);

$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r} = 2\varepsilon$;

ω и r — площадь сечения и радиус трубы;

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ — дополнительное относительное удлинение периметра трубопровода, вызванное его деформацией благодаря добавочному повышению давления на $p_{уд} - p$.

$\sigma = \frac{p_{уд} - p}{2\delta}d$ — дополнительное напряжение в материале трубопровода (см. задачу 4-16);

E — модуль упругости материала трубопровода

Подставляя найденные величины в уравнение (19-5) и принимая в дальнейшем $dp = p_{уд} - p$, получим:

$$v = (p_{уд} - p)a\left(\frac{1}{K} + \frac{d}{\delta E}\right).$$

Заменяя в последнем выражении $p_{уд} - p$ согласно формуле (19-3), будем иметь:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{K}{\beta\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{E}\frac{d}{s}}}. \qquad (19\text{-}6)$$

В связи с формулой (19-6) формулу Жуковского можно представить в виде[1]:

$$p_{уд} - p = \rho v \frac{\sqrt{\frac{K\rho}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{K}{E}\frac{d}{s}}}. \qquad (19\text{-}7)$$

При постепенном перекрытии трубопровода явление удара будет происходить более сложно.

Если закрытие задвижки происходит не мгновенно, а постепенно, для приближенного определения $p_{уд}$ может служить формула

$$p_{уд} - p = \rho v a \frac{T}{t_{зак}}, \qquad (19\text{-}8)$$

где T — фаза удара;

$t_{зак}$ — время закрытия задвижки

19-4. Дифференциальные уравнения гидравлического удара

Для более подробного исследования явлений, возникающих при гидравлическом ударе, рассмотрим одномерное движение жидкости в горизонтальной прямой трубе (см. фиг. 19-4).

Исходными уравнениями для исследования удара будут:

1) уравнение Эйлера (в котором весом пренебрегаем, а гидравлическое сопротивление не учитываем), принимаем $u_y = u_z = 0$, $u_x \approx v$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v;$$

в этом уравнении пренебрегаем величиной $\frac{\partial v}{\partial x}$, малой по сравнению с $\frac{\partial v}{\partial t}$, тогда получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \qquad (19\text{-}9)$$

2) уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0,$$

[1] См. сноску на стр. 318.

в котором пренебрегаем величиной $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, малой по сравнению с $\frac{\partial v}{\partial x}$, при этом будем иметь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

что в связи с уравнением сжимаемости жидкости (2-31), которое представим в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta_c \rho \frac{\partial p}{\partial t},$$

может быть записано и так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + K\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (19\text{-}10)$$

Фиг. 19-4. Схема трубопровода с задвижкой на конце

Дифференцируя уравнение (19-9) по x, а уравнение (19-10) по t и вычитая одно из другого, получим (обозначая $a^2 = \frac{K}{\rho}$):

$$a^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad (19\text{-}11)$$

Дифференцируя уравнение (19-10) по x, а уравнение (19-9) по t и вычитая одно из другого, найдем:

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \qquad (19\text{-}12)$$

Интеграл уравнения (19-11) может быть представлен в виде

$$p = p_0 + \theta\left(t - \frac{x}{a}\right) + \Phi\left(t + \frac{x}{a}\right), \qquad (19\text{-}13)$$

где θ и Φ любые произвольные функции от $\left(t - \frac{x}{a}\right)$ и $\left(t + \frac{x}{a}\right)$, выражающие закон изменения давления по длине трубопровода и во времени;

p_0 — начальное давление до удара.

Интеграл уравнения (19-12) при выбранном направлении осей координат может быть представлен в виде

$$v = v_0 + \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right), \qquad (19\text{-}14)$$

где v — проекция скорости;

v_0 — начальная скорость;

φ и ψ — любые произвольные функции от $\left(t - \frac{x}{a}\right)$ и $\left(t + \frac{x}{a}\right)$, выражающие закон изменения скорости по длине трубопровода и во времени.

В том, что интегралы для v и p удовлетворяют дифференциальным уравнениям (19-11) и (19-12), можно убедиться простой подстановкой их значений в эти уравнения.

Установим зависимость между функциями φ, ψ, θ и Φ. Для этого вычислим их частные производные. Из уравнений (19-13) и (19-14) получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \theta' + \Phi';$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{a}\varphi' + \frac{1}{a}\psi'.$$

Подставляя эти значения в (19-10), будем иметь:

$$\theta' + \Phi' - K\left(+\frac{1}{a}\varphi' - \frac{1}{a}\psi'\right) = 0,$$

или

$$\theta' + \Phi' = \frac{K}{a}(\varphi' - \psi'),$$

откуда

$$\theta + \Phi = \frac{K}{a}(\varphi - \psi).$$

Таким образом, уравнение (19-13) можно представить в виде:

$$p = p_0 + \rho a\left[\varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \psi\left(t + \frac{x}{a}\right)\right]. \qquad (19\text{-}15)$$

В уравнении (19-14) заменим $(-v)$ на v и представим его в виде:

$$v = v_0 - \left[\varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right)\right]. \qquad (19\text{-}16)$$

Выясним физический смысл функции φ и ψ и величины a. Так как φ и ψ являются частными решениями уравнений удара, то в частном случае может оказаться, что или $\varphi = 0$, или $\psi = 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $\psi = 0$.

Допустим, что в некоторый момент времени t_1 в трубопроводе (фиг. 19-4) на расстоянии x_1 установилось ударное давление p. Выясним, в какой момент времени t_2 и в каком другом месте x_2 давление также сделается равным p. Очевидно, в этом случае согласно уравнению (19-15)

$$\varphi\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = \varphi\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right),$$

откуда

$$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a},$$

или

$$(x_2 - x_1) = (t_2 - t_1)a. \qquad (19\text{-}17)$$

Из формулы (19-17) следует (так как $t_2 > t_1$), что ударное давление распространяется по трубопроводу с постоянной скоростью a. Следовательно, a является скоростью распространения ударной волны вдоль трубопровода, что следует также из формулы (19-6), если пренебречь деформацией трубопровода и принять $\beta = 1$.

Так как положительное направление оси x взято в направлении, совпадающем с распространением удара, то функция φ характеризует ударную волну, движущуюся в направлении распространения удара.

Аналогичное исследование функции ψ даст:

$$\psi\left(t_1 + \frac{x_1}{a}\right) = \psi\left(t_2 + \frac{x_2}{a}\right),$$

откуда

$$t_1 + \frac{x_1}{a} = t_2 + \frac{x_2}{a},$$

или

$$x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)a. \qquad (19\text{-}18)$$

Из полученного следует (так как $t_2 > t_1$), что $x_1 > x_2$. Это значит, что функция ψ характеризует волну, движущуюся в сторону, обратную распространению ударной волны, т. е. волну гашения. Таким образом, согласно уравнению (19-15) давление в любой точке трубопровода, в котором происходит гидравлический удар, слагается из алгебраической суммы трех значений: начального давления (давления до удара), давления, создаваемого ударной волной, и давления, создаваемого волной гашения.

19-5. Общий случай гидравлического удара

Рассмотрим первый этап удара для $t < \frac{l}{a}$. Ударная волна, возникая у закрытой задвижки, распространяется от задвижки по трубопроводу к его открытому концу.

Для этого периода волна гашения отсутствует и

$$\psi = 0.$$

Для сечений $x > at$, т. е. для сечений, до которых ударная волна еще не успела дойти, $p = p_0$ и из уравнения (19-15) следует, что

$$\varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) = 0.$$

Во входном сечении у резервуара ($x = l$) всегда $p = p_0$, поэтому для этого сечения в любое время $t \geqslant \frac{l}{a}$, как следует из уравнения (19-15),

$$\psi\left(t + \frac{l}{a}\right) = \varphi\left(t - \frac{l}{a}\right). \qquad (19\text{-}19)$$

Подставляя сюда $t = \frac{l}{a}$, получим:

$$\psi\left(\frac{2l}{a}\right) = \varphi(0), \tag{19-20}$$

откуда следует, что функция ψ волны гашения, возникающей при $t = \frac{l}{a}$ в трубопроводе у резервуара, численно равна функции φ ударной волны, возникшей при $t = 0$ и $x = 0$, т. е. в начале удара у задвижки. Как было раньше установлено, волна гашения с постоянной скоростью a перемещается по трубопроводу к задвижке, накладываясь на ударную волну.

Уравнение (19-19), поскольку оно справедливо для любого момента времени $\left(t > \frac{l}{a}\right)$, можно, заменив t на $t_1 = t - \frac{l-x}{a}$, представить и в виде

$$\psi\left(t + \frac{x}{a}\right) = \varphi\left(t - 2\frac{l-x}{a} - \frac{x}{a}\right) \tag{19-21}$$

Из уравнения (19-21) следует, что функция гашения ударной волны — волны гашения ψ в любом сечении x повторяет значение функции ударной волны, существовавшее там раньше на время

$$\delta t = 2\frac{l-x}{a}. \tag{19-22}$$

Например, у входа в трубопровод ($x = l$) волна гашения впервые возникает при

$$\delta t = 0,$$

т. е. одновременно с приходом ко входу в трубопровод ударной волны. Явление происходит так, как будто бы ударная волна отражается от конца трубопровода и движется в обратную сторону в виде волны гашения давления.

У задвижки $x = 0$ волна гашения появляется от начала удара через время

$$\delta t = \frac{2l}{a} = T,$$

имея при этом значение

$$\psi(t) = \varphi\left(t - \frac{2l}{a}\right). \tag{19-23}$$

Так как функция гашения ψ в уравнение (19-15) входит со знаком, противоположным знаку ударной функции φ, то в местах появления волна гашения будет создавать эффект, противоположный ударной волне. Например, появившись через

время δt после прихода ударной волны в отрезке времени $\frac{l}{a} \leqslant t \leqslant \frac{2l}{a}$ в любом сечении трубопровода, в том числе и у задвижки, она будет гасить давление, созданное ударной волной. Проверим это для сечения у задвижки.

Из уравнения (19-15) для $x = 0$ и $t = \frac{2l}{a}$ получим:

$$p = p_0 + \rho a\left[\varphi\left(\frac{2l}{a}\right) - \psi\left(\frac{2l}{a}\right)\right],$$

но согласно (19-21)

$$\psi\left(\frac{2l}{a}\right) = \varphi(0),$$

а для сечения у задвижки при $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$

$$\varphi(t) = \varphi(0),$$

поэтому

$$p = p_0,$$

т. е. через время $t = \frac{2l}{a}$ давление у задвижки станет равным начальному. Но на этом явление удара, как было описано вначале, не прекратится.

В связи с зависимостью (19-21) уравнения (19-15) и (19-16) позволяют выразить давления и скорости у задвижки в любой фазе в виде:

$$p_n - p_0 = \rho a(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \tag{19-24}$$

$$v_n - v_0 = -(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \tag{19-25}$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$2\varphi_n \rho a = (p_n - p_0) - \rho a(v_n - v_0);$$

$$2\varphi_{n-1}\rho a = -(p_n - p_0) - \rho a(v_n - v_0).$$

Подставляя в предыдущее уравнение $n - 1$ вместо n, будем иметь

$$2\varphi_{n-1}\rho a = (p_{n-1} - p_0) - \rho a(v_{n-1} - v_0).$$

Приравнивая правые части двух выражений для $2\varphi_{n-1}$, найдем, что

$$p_{n-1} + p_n - 2p_0 = \rho a(v_{n-1} - v_n),$$

или

$$(p_n - p_0) + (p_{n-1} - p_0) = \rho a(v_{n-1} - v_n);$$

$$(p_n - p_0) - (p_{n-1} - p_0) = \rho a(v_{n-1} - v_n) - 2(p_{n-1} - p_0),$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} p_1 - p_0 &= \rho a (v_0 - v_1);\\ (p_2 - p_0) - (p_1 - p_0) &= \rho a (v_1 - v_2) - 2(p_1 - p_0),\\ (p_3 - p_0) - (p_2 - p_0) &= \rho a (v_2 - v_3) - 2(p_2 - p_0);\\ (p_n - p_0) - (p_{n-1} - p_0) &= \rho a (v_{n-1} - v_n) - 2(p_{n-1} - p_0). \end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}26)$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$\left.\begin{aligned} p_1 - p_0 &= \rho a (v_0 - v_1);\\ p_2 - p_0 &= \rho a (v_1 - v_2) - \rho a (v_0 - v_1);\\ p_3 - p_0 &= \rho a (v_2 - v_3) - \rho a (v_1 - v_2) + \rho a (v_0 - v_1),\\ p_4 - p_0 &= \rho a (v_3 - v_4) - \rho a (v_2 - v_3) + \rho a (v_1 - v_2) - \\ &\qquad - \rho a (v_0 - v_1);\\ p_n - p_0 &= \rho a (v_{n-1} - v_n) - \\ &\qquad - \rho a (v_{n-2} - v_{n-1}) \ldots \pm \rho a (v_0 - v_1). \end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}27)$$

Кроме первого уравнения, все остальные получены соответствующим суммированием левых и правых частей уравнений системы (19-26). Члены, стоящие в правых частях полученных уравнений со знаком «+», могут рассматриваться как ударные волны, а с отрицательным — как волны гашения давления.

Чем больше время удара, тем большее число волн (ударных и гашения) накладывается друг на друга. Результирующее повышение или понижение давления в любой фазе удара определяется как алгебраическая сумма выражений

$$p_n - p_0 = \rho a \sum_{n=1}^{n} \pm (v_{n-1} - v_n). \quad (19\text{-}28)$$

Если задвижка закрывается еще в первой фазе (мгновенное закрытие), то $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0$, а

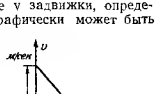
$$\left.\begin{aligned} p_1 - p_0 &= \rho a v_0;\\ p_2 - p_0 &= -\rho a v_0;\\ p_3 - p_0 &= +\rho a v_0;\\ p_n - p_0 &= (-1)^{n+1} \rho a v_0. \end{aligned}\right\} \quad (19\text{-}29)$$

Этим соотношениям удовлетворяет график, изображенный на фиг. 19-2.

Исследование гидравлического удара для случая, когда задвижка закрывается не мгновенно, наглядно осуществляется графоаналитическим методом.

Рассмотрим случай, когда скорость потока в трубопроводе за время закрытия изменяется по закону, показанному на фиг. 19-5.

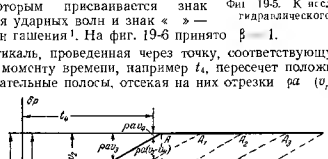
В этом случае давление, возникающее у задвижки, определяется системой уравнений (19-27) и графически может быть определено, как показано на фиг. 19-6.



Фиг. 19-5. К исследованию гидравлического удара.

Сначала построим график (фиг. 19-6), удовлетворяющий уравнению (19-4) (линия OBA). Затем строятся аналогичные графики, каждый из которых сдвигается вправо на время T (пунктирные линии). Построенные линии делят плоскость графика на полосы, которым присваивается знак «+» для ударных волн и знак «−» для волн гашения[1]. На фиг. 19-6 принято $\beta = 1$.

Вертикаль, проведенная через точку, соответствующую некоторому моменту времени, например t_4, пересечет положительные и отрицательные полосы, отсекая на них отрезки $\rho a (v_{n-1} - v_n)$,



Фиг. 19-6. Графоаналитический метод расчета гидравлического удара.

равные членам, входящим в уравнения (19-27). В этом можно убедиться путем сравнения отрезков с членами уравнений, соответствующими, например, $p_4 - p_0$.

В течение первой фазы согласно уравнениям (19-27) давление изменяется по линии OB. В течение второй фазы ударная волна создает давление $\rho a (v_1 - v_2)$, а волна гашения гасит да-

[1] Фиг. 19-6 заимствована из учебника: И. И. Агроскин, Г. Д. Дмитриев и Ф. И. Пикалов, Гидравлика, Госэнергоиздат, 1954.

вление, равное $\rho a(v_0 - v_1)$. Графически давление изображается отрезком BC. В течение третьей фазы действуют две ударные волны $\rho a(v_2 - v_3) + \rho a(v_0 - v_1)$ и одна волна гашения $\rho a(v_1 - v_2)$. График давления изображается линией CD. В течение четвертой фазы действуют две ударные волны и две волны гашения. Давление изображается линией DE. После момента закрытия диаграмма давлений принимает периодический характер с периодом $2T$

19-6. Применение уравнений удара для тупикового трубопровода (гидравлический тупик)

Как указывалось выше, подобный случай (фиг. 19-7) возникает в трубопроводах топливного насоса, питающего бескомпрессорные двигатели. Будем исходить из уравнений (19-15) и (19-16).

Для гидравлического удара в тупике φ и ψ имеют попрежнему тот же физический смысл, но другие начальные и граничные условия обусловливают между ними другие зависимости. Начальные условия таковы Жидкость во всем трубопроводе в начале удара находится в покое

$$v_0 = 0.$$

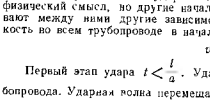
Первый этап удара $t < \frac{l}{a}$. Удар возникает у свободного конца трубопровода. Ударная волна перемещается к закрытому концу тупика. В этом случае

$$v = 0,$$

а для

$$x > at \quad \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) = 0,$$

т. е. область с $x > at$ ударом еще не охвачена.



Фиг. 19-7. Схема трубопровода „гидравлический тупик"

При $x = l$, т. е. в конце тупика, всегда скорость $v = 0$. На этом основании для конца тупика

$$\varphi\left(t - \frac{l}{a}\right) = \psi\left(t + \frac{l}{a}\right). \qquad (19\text{-}30)$$

Из этого следует, что в тупике функция ψ будет иметь такое же численное значение, как и функция φ, но по знаку ей противоположна.

А так как в формуле давления она входит со знаком минус, то в отличие от явления в трубопроводе не тупиковом волна, характеризующаяся функцией ψ, будет не гасить ударную волну, а ее удваивать. Этим удар в тупике отличается от удара в трубе, рассмотренного в § 19-5.

19-7. Гидравлический таран

Явление гидравлического удара находит себе практическое применение в особом водоподъемнике, называемом гидравлическим тараном (фиг. 19-8 – 19-10).

Основными частями гидравлического тарана являются сбросной клапан *1*, напорный клапан *2* и напорный воздушный колпак *3*.

Работа гидравлического тарана происходит следующим образом.

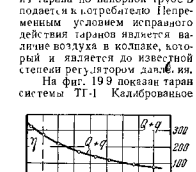
Вода из водоема течет по питающей трубе *4* к тарану в среднем в количестве $(Q + q)$ [*л сек*]. Большая ее часть Q [*л сек*] вытекает через сбросной клапан *1* наружу. Под давлением струи сбросной клапан закрывается, благодаря чему в трубе происходит быстрая остановка жидкости и увеличение давления. Вследствие повышения давления открывается напорный клапан *2* и меньшая часть воды, в среднем q, поступает в напорный воздушный колпак. Вслед за этим давление в трубе *4* падает, вновь открывается клапан *1*, и вода, приходя в движение, выливается опять наружу. С этого момента явление повторяется вновь.[1]

Фиг. 19-8. Схема таранной установки

По мере заполнения водой воздушного колпака давление в нем увеличивается ввиду того, что уменьшается объем, занимаемый воздухом, и вода из тарана по напорной трубе *5* подается к потребителю. Непременным условием исправного действия тарана является наличие воздуха в колпаке, который и является до известной степени регулятором давления.

На фиг. 19-9 показан таран системы ТГ-1. Калиброванное отверстие *7* (форсунка) служит для непрерывного автоматического положения

Фиг. 19-9. Гидравлический таран системы ТГ-1.



Фиг. 19-10. Характеристика тарана системы ТГ-1

[1] Ввиду того, что при нормальном положении жидкость прижимает сбросной клапан, который перекрывает отверстие, для пуска тарана сбросной клапан необходимо принудительно открыть. В дальнейшем он работает автоматически.

воздухом воздушного колпака. Таран этой конструкции выполняется для диаметров питательной трубы $d = 50$ *мм* и $d = 76$ *мм* и напорной трубы $d = 36$ *мм*. На производительность тарана q, кроме его размеров, существенное влияние оказывает число ударов ударного клапана. Чем тяжелее ударный клапан, тем больше вес груза Q сбрасывается наружу, тем меньше к. п. д. тарана. Число ударов ударного клапана регулируется грузами $б$ и устанавливается в зависимости от длины и диаметра питающей трубы, высоты падения жидкости h и высоты подъема H. Так, например, опыт показывает, что при питающей трубе диаметром в 76 *мм* и длиной 13,5 *м* при высоте падения $h = 3$ *м* и высоте подъема $H = 27$ *м* число ударов, соответствующее максимальному к. п. д. (фиг. 19-10), в минуту должно быть 100. При этом производительность тарана $q = 6{,}4$ *л мин*, а расход $Q = 73{,}6$ *л/мин*.

Коэффициент полезного действия тарана определяется по формуле

$$\eta = \frac{qH}{Qh} \qquad (19\text{-}31)$$

В приведенном примере

$$\eta = \frac{6{,}4 \cdot 27}{73{,}6 \cdot 3} = 0{,}78.$$

Задача 19-1. Требуется определить напряжение в материале трубы (задача 4-16) при мгновенной остановке воды, двигавшейся со скоростью $v = 2$ *м сек*. Дано $K = \frac{1}{\beta_c} = 21\,000$ *кГ см²*; $E = 10^6$ *кГ см²*; давление перед задвижкой до закрытия $p_0 = 15$ *кГ см²*.

Решение. Определим по формуле (19-7) повышение давления, принимая $\beta = 1{,}04$.

$$\delta p = p_{уд} - p_0 = 102 \cdot 2 \cdot \frac{1\,463}{1 + \frac{0{,}205 \cdot 21\,000}{0{,}0105 \cdot 10^6}} = 24{,}37 \text{ кГ см}^2,$$

где

$$b = \frac{\gamma}{g} = \frac{1\,000}{9{,}81} = 102 \text{ кГ} \cdot \text{сек}^2 \text{ м}^4,$$

$$\sqrt{\frac{K \cdot \beta}{\rho}} = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^3 \cdot 1{,}04}{102}} = 1\,463 \text{ м/сек}.$$

Давление в жидкости

$$p_{уд} = p_0 + \delta p = 39{,}37 \text{ кГ см}^2.$$

Напряжение в трубе

$$\sigma = \frac{pd}{2s} = \frac{39{,}37 \cdot 20{,}5}{2 \cdot 1{,}05} = 375 \text{ кГ см}^2.$$

При нормальной работе

$$\sigma = \frac{pd}{2s} = \frac{15 \cdot 20{,}5}{2 \cdot 1{,}05} = 143 \text{ кГ/см}^2.$$

Глава двадцатая

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

Отверстиям и насадкам, через которые происходит истечение жидкости в зависимости от их назначения, придают различные формы.

Иногда отверстие служит только для пропуска определенного расхода. В этом случае характер струи и форма отверстия часто не имеют существенного значения; при любой форме отверстия (круглое, прямоугольное и т. п.) всегда можно рассчитать его размеры так, чтобы оно обеспечило нужные условия. В других случаях характер и форма струи вытекающей жидкости являются весьма важными элементами, определяющими качество струи. Например, струя, вытекающая из пожарного брандспойта, из гидромонитора, должна не только нести достаточное количество жидкости, но, кроме того, быть сильной и компактной на значительной части своей длины. Это требование может обеспечить не всякое отверстие.

В свою очередь компактная и сильная струя не может соответствовать условиям, при которых требуется распыленная струя: распыл топлива в двигателях внутреннего сгорания, искусственное дождевание, моечные устройства на заводах, автомобильных парках и т. п. Таким образом, требования, предъявляемые к отверстиям и их формам, различны. Этим объясняется широкое разнообразие форм отверстий и насадков, используемых в инженерном деле.

20-1. Истечение жидкости из отверстия при постоянном напоре

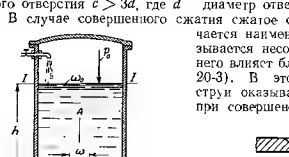
Рассмотрим сначала истечение жидкости из резервуара через отверстие, сделанное в дне. К отверстию жидкость подтекает со всех сторон, поэтому в плоскости отверстия частицы движутся по криволинейным траекториям (фиг. 20-1).

При выходе жидкости из отверстия образуется струя. Благодаря криволинейности траекторий у отверстия площадь горизонтальных сечений струи оказывается меньше площади отверстия. Происходит сжатие струи. Струя в дальнейшем сохраняет на некоторой длине форму отверстия только в том случае, если отверстие горизонтальное и круглое.

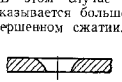
Большое влияние на сжатие оказывает форма отверстия. Например, для отверстия с фаской или с закруглением, очерченным по форме струи (фиг. 20-2), сжатие струи получается значительно меньшим. Влиянием стенок определяется характер сжатия струи. Сжатие называется совершенным, если на него не оказывают влияние стенки резервуара. Это имеет место, если стенки

удалены от отверстия на расстояние c (фиг. 20-3), большее утроенной длины соответствующей стороны отверстия (для круглого отверстия $c > 3d$, где d — диаметр отверстия).

В случае совершенного сжатия сжатое сечение струи получается наименьшим. Сжатие называется несовершенным, если на него влияет близость стенок (фиг. 20-3). В этом случае сечение струи оказывается большее, чем при совершенном сжатии.

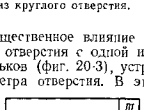


Фиг. 20-1. Струя при истечении из круглого отверстия.

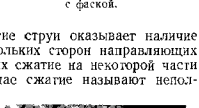


Фиг. 20-2. Отверстия с фаской.

Существенное влияние на сжатие струи оказывает наличие около отверстия с одной или нескольких сторон направляющих козырьков (фиг. 20-3), устраняющих сжатие на некоторой части периметра отверстия. В этом случае сжатие называют неполным в отличие от полного, при котором козырьки отсутствуют.



Фиг. 20-3. Расположение отверстий при неполном и несовершенном сжатии.



Фиг. 20-4. Инверсия струи.

Сечение струи сильно преобразуется при вытекании из прямоугольного или треугольного отверстия (фиг. 20-4). Это явление называется инверсией струи.

Сжатие струи является одной из важнейших особенностей, характеризующих истечение жидкости из отверстий.

На небольшом расстоянии от круглого отверстия $l=(0{,}5-1)d$ (где d — диаметр отверстия) происходит выпрямление траекторий частиц и за указанным сечением частицы практически движутся почти параллельно. Площадь живого сечения струи ω_c в этом месте

$$\omega_c = \varepsilon\omega, \tag{20-1}$$

где ω — площадь отверстия;

ε — коэффициент сжатия струи, равный отношению площади сжатого сечения к площади отверстия и определяемый в большинстве случаев опытным путем.

Коэффициент сжатия в первую очередь зависит от формы отверстия, от положения отверстия относительно стенок резервуара и в общем случае от чисел Рейнольдса, Фруда, Вебера. В случаях, представляющих практический интерес, влиянием чисел Фруда и Вебера можно пренебречь и коэффициент ε считать

Фиг. 20-5. Зависимость коэффициентов ε, φ и μ от Re_m для отверстия с острой кромкой.

функцией только числа Re. На фиг. 20-5 приведены значения ε по данным А. Д. Альтшуля для совершенного сжатия при истечении из круглого отверстия с острой кромкой[1].

Для определения скорости истечения применим уравнение Бернулли для потока. За живые сечения, ограничивающие рассматриваемый участок потока, примем свободную поверхность жидкости в резервуаре и сжатое сечение струи. В обоих этих горизонтальных сечениях давления постоянны и поэтому соответствуют гидростатическому закону.

За плоскость сравнения примем горизонтальную плоскость, проходящую через сжатое сечение струи. Будем иметь:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta\frac{v_c^2}{2g},$$

[1] А. Д. Альтшуль, Истечение из отверстий жидкостей с повышенной вязкостью, „Нефтяное хозяйство", 1950, № 2.

где ζ — коэффициент сопротивления при истечении, отнесенный к скорости в расчетном сечении струи.

Подставляя вместо

$$z_0 = h + l, \text{ а } z_c = 0,$$

получим:

$$v_c = \frac{\sqrt{2g\left(h + l + \frac{p_0 - p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)}}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}. \qquad (20\text{-}2)$$

В тех случаях, когда можно пренебречь l по сравнению с h,

$$v_c = \frac{\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)}}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}}, \qquad (20\text{-}3)$$

или

$$v_c = \varphi\sqrt{2gH_{ист}}, \qquad (20\text{-}4)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}} \text{ — коэффициент скорости;} \qquad (20\text{-}5)$$

$$H_{ист\,0} = h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \text{ — полный напор истечения.} \qquad (20\text{-}6)$$

Напор истечения следует рассматривать как удельную энергию потока в сечении на уровне свободной поверхности, вычисленную относительно уровня сжатого сечения и давления p_c.

Неудобство формулы (20-2) или (20-3) состоит в том, что скорость v_0 определяется по ней только методом подбора.

Преобразуем эту формулу, заменив в ней согласно уравнению неразрывности

$$v_0 = \frac{v_c \omega_c}{\omega_0} = \frac{v_c \omega_c}{\omega_0}.$$

Будем иметь

$$v_c = \varphi\frac{\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}}{\sqrt{1 - \alpha_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \varepsilon\varphi\right)^2}}. \qquad (20\text{-}7)$$

где

$$h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma} = H_{ист}$$

называется напором истечения.

Если площадь отверстия ω мала по сравнению с площадью свободной поверхности ω_0, то можно пренебречь вторым членом в знаменателе. В этом случае отверстие называется малым.

Для малого отверстия будем иметь:

$$v_c = \varphi\sqrt{2gH_{ист}}. \qquad (20\text{-}8)$$

Пренебрегая неравномерностью распределения скоростей в расчетном сечении струи и гидравлическими сопротивлениями, т. е. принимая $\alpha_c = 1$ и $\zeta = 0$, получим формулу для скорости, которую будем называть теоретической скоростью v_m,

$$v_m = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}. \qquad (20\text{-}9)$$

При $p_0 = p_c$ эта формула превращается в формулу Торричелли.

Коэффициент скорости φ согласно формуле (20-5) учитывает влияние на скорость истечения степени неравномерности распределения скоростей в сжатом сечении и гидравлических сопротивлений. Коэффициент скорости представляет отношение действительной скорости истечения к теоретической

$$\varphi = \frac{v_c}{v_m}. \qquad (20\text{-}10)$$

Теоретически коэффициент скорости φ может быть найден только для ламинарного истечения. Для этого случая интегрирование дифференциальных уравнений движения реальной жидкости приводит для скорости к формуле Сэмпсона, имеющей вид[1]:

$$v_c = \frac{gd}{24\nu}\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right), \qquad (20\text{-}11)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, а d — диаметр отверстия. Сопоставляя формулу (20-11) с формулой (20-8), получим:

$$\varphi = \frac{Re_m}{48}, \qquad (20\text{-}12)$$

где

$$Re_m = \frac{v_m d}{\nu}.$$

Экспериментальная проверка формулы (20-12), выполненная автором, показывает, что хорошее совпадение с опытом получается при $Re_m < 5$.

[1] М. А. Великанов, Динамика русловых потоков, т. I, ГИТТЛ, 1954.

Для других значений Re_m при истечении в атмосферу из отверстия с острой кромкой и совершенном сжатии график значений φ приведен на фиг. 20 5. При числах $Re_m > 10^5$ величина коэффициента φ изменяется от $\varphi = 0{,}96$ до $\varphi = 0{,}995$. Практически эту область можно рассматривать как квадратичную Стремление к единице коэффициента φ свидетельствует об исчезающем влиянии на коэффициент скорости при больших числах Re_m гидравлических сопротивлений.

Расход вычислим по формуле

$$Q = v_c \omega_c; \tag{20-13}$$

$$Q = \varphi\varepsilon\omega \frac{\sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}}{\sqrt{1 - \varepsilon_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \varepsilon\right)^2}}, \tag{20-14}$$

Введем в рассмотрение коэффициент расхода μ, равный

$$\mu = \varphi\varepsilon. \tag{20-15}$$

Для малых отверстий будем иметь:

$$Q = \mu\omega \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}. \tag{20-16}$$

Назовем теоретическим расходом (для малого отверстия) величину

$$Q_m = \omega \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}. \tag{20 17}$$

В этом случае коэффициент расхода можно рассматривать как отношение действительного расхода к теоретическому

$$\mu = \frac{Q}{Q_m} \tag{20 18}$$

В частном случае, когда давление на поверхности жидкости в резервуаре равно атмосферному и истечение происходит в атмосферу, т. е когда p_0 и p_c равны, будем иметь:

$$v_c = \varphi \sqrt{2gh}; \tag{20-19}$$

$$Q = \mu\omega \sqrt{2gh}. \tag{20-20}$$

Полученные результаты в общем случае нельзя распространить на истечение из отверстий в вертикальной стенке.

При истечении жидкости из отверстия в вертикальной стенке в сжатом сечении ω_c давления во всех точках практически являются постоянными: $p = \text{const}$. Поэтому в сечении ω_c давления уже не распределяются по законам гидростатики:

$$z + \frac{p}{\gamma} \neq \text{const}$$

и уравнение Бернулли (10-23) для этого случая оказывается неприменимым. Здесь надо было бы применить уравнение (10-26).

Однако если вертикальные размеры отверстия малы, выводы этого параграфа можно распространить на них. Как будет следовать из дальнейшего, это можно будет делать для прямоугольных отверстий (см. фиг. 20 9) при $a \leqslant 0{,}5h_T$, а для круглых отверстий (фиг. 20-10) при $r \leqslant 0{,}3h_T$, что практически обычно имеет место. На значения коэффициента расхода влияют те же факторы, что и на коэффициенты ε и φ. Поэтому в общем случае

$$\mu = f(Re,\ Fr,\ We). \tag{20-21}$$

В случаях, представляющих практический интерес,

$$\mu = f(Re).$$

В квадратичной области для данного отверстия

$$\mu = \text{const}.$$

На фиг. 20-5 приведены значения коэффициента μ по данным автора и табл. 20-1—20-3.

Таблица 20-1

Значения коэффициента расхода μ при истечении из прямоугольного отверстия в тонкой вертикальной стенке

Напор над верхним краем отверстия, м	Ширина отверстия, м							
	$b = 0{,}20$						$b = 0{,}60$	
	Высота отверстия, м							
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,2	0,02	0,20
0,10	0,667	0,655	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,20	0,655	0,649	0,634	0,631	0,615	0,598	0,635	0,605
0,30	0,650	0,645	0,632	0,630	0,616	0,600	0,633	0,607
0,40	0,646	0,642	0,631	0,629	0,617	0,602	0,631	0,607
0,50	0,643	0,640	0,631	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
0,70	0,638	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
0,80	0,635	0,635	0,628	0,626	0,616	0,605	0,628	0,606
0,90	0,632	0,634	0,627	0,625	0,615	0,605	0,627	0,606
1,00	0,629	0,632	0,627	0,625	0,615	0,605	0,626	0,605
1,50	0,617	0,620	0,621	0,619	0,611	0,602	0,623	0,602
2,00	0,613	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,00	0,609	0,608	0,607	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

Таблица 20-2

Значения коэффициента расхода μ при истечении из квадратных отверстий в тонкой вертикальной стенке

Напор в центре отверстия, *м*	Ширина квадратного отверстия, *м*					
	0,01	0,02	0,03	0,06	0,12	0,18
0,20	0,648	0,624	0,617	0,605	0,598	—
0,30	0,636	0,619	0,613	0,605	0,601	0,599
0,50	0,628	0,618	0,610	0,605	0,602	0,601
1,00	0,620	0,610	0,607	0,605	0,604	0,603
1,50	0,618	0,609	0,606	0,604	0,603	0,602
2,00	0,614	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,00	0,611	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,00	0,605	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600
15,00	0,601	0,601	0,600	0,600	0,599	0,599
30,00	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Таблица 20-3

Значения коэффициента расхода μ при истечении из круглых отверстий в тонкой вертикальной стенке

№ п/п.	Напор в центре отверстия, *м*	Диаметр отверстия, *м*					
		0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3
1	0,20	0,635	0,616	0,611	0,602	0,595	0,593	0,590
2	0,30	0,629	0,612	0,608	0,601	0,597	0,595	0,592
3	0,50	0,622	0,608	0,605	0,600	0,599	0,596	0,594
4	1,00	0,614	0,604	0,602	0,599	0,599	0,597	0,596
5	1,50	0,610	0,602	0,601	0,598	0,598	0,596	0,595
6	2,00	0,608	0,601	0,600	0,598	0,598	0,596	0,596
7	3,00	0,605	0,599	0,598	0,597	0,597	0,596	0,595
8	6,00	0,600	0,597	0,596	0,596	0,596	0,595	0,594
9	30,00	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

Анализ фигур и таблиц показывает, что в широком диапазоне значений $Re = 10^4 \div 2 \cdot 10^6$ в прямоугольных отверстиях μ изменяется всего в пределах $10^0/_0$, а в круглых—в пределах $7^0/_0$; поэтому не будет большой ошибкой принять для этого диапазона средние значения

$$\mu_{пр} = 0{,}634;$$

$$\mu_{кр} = 0{,}615.$$

Для прямоугольного отверстия шириной $b = 200$ *м* и высотой $a = 10 \div 200$ *мм* и для квадратного $a = b = 10 \div 180$ *мм*

для $Re_m > 10\,000$ коэффициент расхода можно определять по формулам автора:

$$\mu_{пр} = 0{,}5915 + \frac{8{,}9}{\sqrt{Re_m}}; \qquad (20\text{-}22)$$

$$\mu_{кв} = 0{,}581 + \frac{8{,}9}{\sqrt{Re_m}}, \qquad (20\text{-}23)$$

где

$$Re_m = \frac{d\sqrt{2gH_{ист}}}{\nu}. \qquad (20\text{-}24)$$

Данные табл. 20-3 для круглых отверстий укладываются весьма хорошо в формулу А. Д. Альтшуля[1] для $Re_m > 10\,000$:

$$\mu = 0{,}592 + \frac{5{,}5}{\sqrt{Re_m}}, \qquad (20\text{-}25)$$

где

$$Re_m = \frac{d\sqrt{2gH_{ист}}}{\nu}.$$

Изложенное выше относилось к совершенному сжатию струи.

В случае несовершенного, но полного сжатия имеются данные для определения коэффициента расхода, полученные при исследовании истечения воды.

Академик Н. Н. Павловский в своем гидравлическом справочнике приводит следующие формулы, которые можно применять и для других жидкостей для квадратичной области:

а) для круглых отверстий

$$\mu_{кр} = \mu(1 + k_1); \qquad (20\text{-}26)$$

б) для прямоугольных отверстий

$$\mu_{пр} = \mu(1 + k_2), \qquad (20\text{-}27)$$

где μ — коэффициент расхода при совершенном сжатии; k_1 и k_2 — коэффициенты, зависящие от отношения площади отверстия ω к площади поперечного сечения потока перед отверстием Ω. Эти коэффициенты вычисляются по формулам Вейсбаха:

$$k_1 = 0{,}0456\left(14{,}8^{\frac{\omega}{\Omega}} - 1\right), \qquad (20\text{-}28)$$

$$k_2 = 0{,}076\left(9^{\frac{\omega}{\Omega}} - 1\right), \qquad (20\text{-}29)$$

[1] А. Д. Альтшуль, Истечение из отверстий жидкостей с повышенной вязкостью, „Нефтяное хозяйство", 1950, № 2.

действительным по указанию Н. Н. Павловского только для $\frac{\omega}{\Omega} < 0{,}7 \div 0{,}8$. Значения k_1 и k_2 приведены в табл. 20-4.

Таблица 20-4

Значения коэффициентов k_1 и k_2 в формулах (20-28) и (20-29)

$\frac{\omega}{\Omega}$	0,05	0,01	0,15	0,2	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
k_1	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112
k_2	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128

Продолжение

$\frac{\omega}{\Omega}$	0,50	0,55	0,60	0,70
k_1	0,134	0,161	0,189	0,260
k_2	0,152	0,178	0,208	0,278

В случае неполного сжатия при истечении в атмосферу и для квадратичных режимов коэффициент расхода может быть определен по формуле

$$\mu_{\text{н п}} = \mu\left(1 + k\frac{n}{\chi}\right), \tag{20-30}$$

в которой μ — коэффициент расхода при полном сжатии;

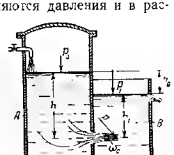
n — часть периметра отверстия, на котором устранено сжатие;

χ — полный периметр отверстия;

k — коэффициент, имеющий значение: для круга $k = 0{,}128$, для малого квадрата $k = 0{,}152$, для прямоугольника шириной 20 *см* и высотой 16 *см* $k = 0{,}157$, для малого прямоугольника $k = 0{,}134$; считаясь с тем, что приведенные коэффициенты справедливы для сравнительно малых отверстий и в некоторых случаях пользование ими дает неудовлетворительные результаты, Н. Н. Павловский рекомендует принимать для $\frac{n}{\chi}$, близких к единице, $k = 0{,}4$.

20-2. Истечение жидкости из затопленного отверстия при постоянном напоре

В рассматриваемом случае жидкость течет (фиг. 20-6) из резервуара A в резервуар B. В резервуаре B давления можно считать распределяющимися по гидростатическому закону. Поэтому по гидростатическому закону распределяются давления и в расчетном сечении струи ω_c.



Фиг. 20-6. Схема истечения из затопленного отверстия.

На этом основании для определения скорости в расчетном сечении струи и расхода через отверстие можно воспользоваться формулами (20-7) или (рассматривая его как малое) (20-8) и (20-14) или (20-16), в которых для рассматриваемого случая h — глубина погружения центра тяжести отверстия относительно свободного уровня жидкости в резервуаре A, p_0 — давление на свободной поверхности в резервуаре A; $p_c = p_1 + \gamma h_1$ — давление в расчетном сечении струи, где p_1 — давление на свободной поверхности в резервуаре B; h_1 — глубина погружения центра тяжести отверстия относительно свободного уровня в резервуаре B.

Подставляя значение p_c в формулы (20-8) и (20-16), получим для малых отверстий

$$v_c = \varphi\sqrt{2g\left(h_0 + \frac{p_0 - p_1}{\gamma}\right)}; \tag{20-31}$$

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\left(h_0 + \frac{p_0 - p_1}{\gamma}\right)}, \tag{20-32}$$

где

$$h_0 = h - h_1.$$

Если p_0 и p_1 равны атмосферному давлению, а отверстие можно считать малым,

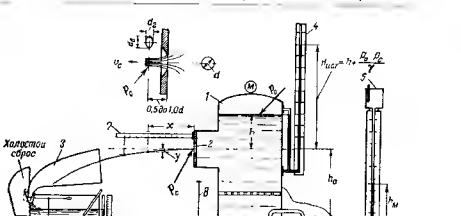
$$v_c = \varphi\sqrt{2gh_0}; \tag{20-33}$$

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gh_0}. \tag{20-34}$$

Значения коэффициентов φ и μ обычно принимают равными соответствующим коэффициентам при истечении через незатопленное отверстие.

20-3. Экспериментальное определение коэффициентов расхода, сжатия, скорости и сопротивления

Определение коэффициентов, характеризующих истечение жидкостей из отверстий, может быть осуществлено на установке, изображенной на фиг. 20-7. Здесь жидкость из бака *1* через исследуемое отверстие *2* вытекает в атмосферу.



Фиг. 20-7. Экспериментальная установка для исследования коэффициентов истечения.

Проще всего определяется коэффициент расхода μ для малого отверстия. Для его определения необходимо согласно формуле (20 18) опытным путем, например посредством мерного бака 9 (или другого точного измерителя расхода), определить действительный расход, а теоретический расход вычислить по формуле (20 17). Для большого отверстия формулу для коэффициента расхода μ можно получить из формулы (20 14) в виде

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2g\omega^2 H_{ист}}{Q^2}}}. \qquad (20\ 35)$$

Для определения напора истечения надо знать только h и p_0, так как $p_c = p_{ат}$, или воспользоваться пьезометром 4.

Для давлений $p_0 > (4 \div 5)$ *кГ см²* для определения μ целесообразно воспользоваться ртутно-машинным манометром 5 В этом случае (фиг. 20 7

$$p_0 = p_{ат} + \gamma_p h_м - \gamma(h + h_c)$$

и при

$$p_c = p_{ат}$$

$$H_{ист} = \frac{\gamma_p}{\gamma} h_м - h_0. \qquad (20\ 36)$$

Коэффициент сжатия определяется струемером, одна из конструкций которого показана на фиг 20-8.

Обычно достаточно измерить только горизонтальный $d_г$ и вертикальный $d_в$ диаметр струи. Площадь ω_c вычисляется по формуле

$$\omega_c = \frac{\pi}{4} d_г d_в.$$

Коэффициент сжатия вычисляется по формуле (20-1).

Для отверстий иных форм, при вытекании через которые струя имеет сложное сечение, требуются другие приборы. Известный французский гидравлик Базен применял струемер, имевший 24 микрометрических винта.

Коэффициент скорости φ может быть определен различным образом; например, если значения μ и ε известны, то согласно формуле (20 15)

$$\varphi = \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

Другой метод заключается в следующем: принимается, что каждая частица струи движется, как свободная материальная точка, на которую действует лишь сила тяжести. Поэтому при показанной на фиг 20-7 системе координат уравнения движения частицы будут иметь следующий вид:

$$x = v_c t, \quad y = \frac{gt^2}{2}, \qquad (20\text{-}37)$$

а уравнения траектории

$$y = \frac{gx^2}{2v_c^2}, \qquad (20\text{-}38)$$

где v_c скорость в сжатом сечении струи.

Подставляя вместо v_c значение по формуле (20 4), получим:

$$y = \frac{gx^2}{4\varphi^2 gH_{ист}},$$

откуда

$$\varphi = \frac{x}{2\sqrt{yH_{ист}}}. \qquad (20\text{-}39)$$

Итак, для определения коэффициента скорости надо вычислить координаты оси струи.

Фиг. 20-8. Струемер.

Микрометр 1 с ножами 2 вращается вместе с обоймой 3 вокруг оси струи. Направляющие 4 позволяют перемещать микрометр вдоль оси струи. Микрометрический винт 5 служит для поперечного перемещения микрометра, 6 — корпус.

Коэффициент сопротивления согласно формуле (20-5) определяется по формуле

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - \alpha_c \qquad (20\text{-}40)$$

В подавляющем большинстве случаев принимают $\alpha_c = 1$, что не всегда допустимо. Вопрос этот совершенно не исследован. При $\alpha_c = 1$ завышается значение ζ, что, однако, не отражается на точности вычислений v_c и Q, поскольку в расчетных формулах всегда фигурирует сумма $\alpha_c + \zeta$.

Изложенные здесь методы могут быть распространены и на случаи истечения, рассматриваемые в следующих параграфах.

20-4. Истечение жидкости из отверстия постоянной ширины в вертикальной стенке при постоянном напоре

Рассмотрим истечение из прямоугольного отверстия (фиг. 20 9) шириной b и высотой a, сделанного в вертикальной стенке, когда отношение $\frac{a}{h}$ относительно велико. Поток представим образованным бесконечно боль-

шим количеством элементарных струек. Причем элементарной площадке отверстия $d\omega = bdh$ соответствует элементарная струйка с площадью $d\omega_c$ в расчетном сечении $C-C$:

$$d\omega_c = \varepsilon bdh$$

Здесь коэффициент ε аналогичен коэффициенту сжатия, но соответствует лишь элементарной струйке.

Скорость частицы, находящейся в расчетном сечении на глубине h, можно вычислить по формуле, аналогичной (20-3) при $p_a = p_c$,

Фиг. 20-9. Схема истечения из прямоугольного отверстия в вертикальной стенке

$$u = \varphi\sqrt{2g\left(h + \frac{u_0^2}{2g}\right)}$$

Коэффициент φ можно назвать, как и раньше, коэффициентом скорости, но соответствующим данной элементарной струйке.

Расход Q будет равен интегралу от расходов элементарных струек

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} c\varphi\sqrt{2g\left(h + \frac{u_0^2}{2g}\right)}\,bdh$$

Для каждой элементарной струйки ε, φ и u_0 будут иметь свои значения, определить которые практически невозможно, поэтому введем коэффициент расхода μ для всего отверстия и среднюю скорость на поверхность v_0. При этом последнюю формулу можно представить в виде:

$$Q = \mu\int_{h_1}^{h_2}\sqrt{2g\left(h + \frac{a_0 v_0^2}{2g}\right)}\,bdh,$$

откуда

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left[\left(h_2 + \frac{a_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_1 + \frac{a_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right], \qquad (20\text{-}41)$$

или

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}\left[\left(1 + \frac{a}{2H_0}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{a}{2H_0}\right)^{3/2}\right], \qquad (20\text{-}42)$$

где

$$H_0 = h_T + \frac{a_0 v_0^2}{2g} \qquad (20\text{-}43)$$

а μ — коэффициент расхода, учитывающий также и замену u_0 на v_0.

Разлагая выражения, стоящие в квадратных скобках, по формуле бинома Ньютона и ограничиваясь шестью членами каждого разложения, получим

$$Q = \mu ba\sqrt{2gH_0}\left[1 - \frac{1}{9}\left(\frac{a}{H_0}\right)^2 - \frac{1}{2\,048}\left(\frac{a}{H_0}\right)^4\right]. \qquad (20\text{-}44)$$

Уже при $\frac{a}{H_0} = 0{,}5$ выражение в квадратных скобках делается равным 0,998 и может быть принято равным единице. В этом случае

$$Q = \mu ba\sqrt{2gH_0}. \qquad (20\text{-}45)$$

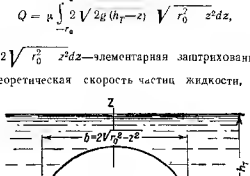
О коэффициенте расхода сказано в § 20 1. Его некоторые значения приведены в таб. 20 1 и 20-2.

20-5. Истечение жидкости из круглого отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре

В случае истечения из круглого отверстия в вертикальной стенке рассуждения, аналогичные предыдущему случаю (согласно фиг 20-10), если принять скорость v_0 на поверхности равной нулю, приведут к формуле для расхода

$$Q = \mu\int_{-r_0}^{+r_0} 2\sqrt{2g(h_T - z)}\,\sqrt{r_0^2 - z^2}\,dz,$$

в этой формуле $2\sqrt{r_0^2 - z^2}\,dz$ — элементарная заштрихованная площадка, а $\sqrt{2g(h_T - z)}$ — теоретическая скорость частиц жидкости, расположенных



Фиг 20-10. Схема истечения из круглого отверстия в вертикальной стенке.

на глубине $h_T - z$. Интегрирование этого выражения осуществляем подстановкой $z = r_0 \cos\theta$, после чего формула расхода принимает вид

$$Q = -2\mu r_0^2\sqrt{2gh_T}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sqrt{1 - \frac{r_0}{h_T}\cos\theta}\,d\theta.$$

Разлагая радикал, стоящий под интегралом, в ряд по формуле бинома Ньютона, ограничиваясь шестью членами разложения и интегрируя, получим:

$$Q = \mu\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r_0}{h_T}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r_0}{h_T}\right)^4\right]\pi r_0^2\sqrt{2gh_T}. \qquad (20\text{-}46)$$

Уже при $\frac{r_0}{h_T} = 0{,}3$ выражение в квадратных скобках делается равным 0,998 и может быть принято равным единице, а

$$Q = \mu\pi r_0^2\sqrt{2gh_T}. \qquad (20\text{-}47)$$

О коэффициенте расхода сказано в § 20-1. Его некоторые значения приведены в табл. 20-3.

20-6. Истечение жидкости через насадки. Внешний цилиндрический насадок

Исследование истечения жидкости из отверстий с острой кромкой показало их малую пропускную способность. Наибольшее значение коэффициента расхода в рассматриваемых случаях не превосходило $\mu = 0{,}67$.

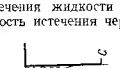
Производительность можно значительно увеличить, если изменить форму отверстия. Например, если заставить жидкость вытекать через отверстие, у которого снята фаска (фиг. 20-2), то коэффициент расхода при истечении воды может быть равным $\mu = 0{,}74$. Еще большего увеличения производительности можно достичь при истечении через короткие патрубки, называемые насадками. Всего будет рассмотрено шесть типов насадков 1) цилиндрический внешний; 2) цилиндрический внутренний; 3) конический сходящийся; 4) конический расходящийся; 5) конический расходящийся с плавным входом; 6) коноидальный. В этом параграфе будет рассмотрен цилиндрический внешний насадок.

Цилиндрический внешний насадок (фиг. 20-11) представляет собой цилиндрическую трубку длиной $l = (3 \div 4)d$, имеющую острую входную кромку. При протекании жидкости через более короткие насадки, особенно при больших напорах истечения, струя пролетает насадок, не касаясь его стенок (фиг. 20-12). В этом случае истечение происходит, как из отверстия без насадка. Такое явление будем называть срывом истечения через насадок.

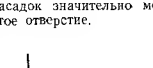
Жидкость, устремляясь в насадок из резервуара, уже внутри насадка в области входа образует сжатую струю, сечение которой благодаря острой входной кромке значительно меньше сечения насадка. В дальнейшем струя расширяется и вытекает из насадка, имея сечение, равное площади отверстия. Таким образом, коэффициент сжатия струи на выходе $\varepsilon = 1$.

Расширение струи в насадке, особенно если он очень короткий, носит характер внезапного расширения и вызывает добавочные потери энергии по сравнению с потерями энергии при истечении из простых отверстий. Некоторое влияние на общие потери энергии в насадке оказывают гидравлические сопротивления по его длине.

Благодаря большим гидравлическим сопротивлениям скорость истечения жидкости через насадок значительно меньше, чем скорость истечения через простое отверстие.



Фиг. 20-11. Схема истечения через внешний цилиндрический насадок



Фиг. 20-12. Схема истечения через насадок при срыве.

Скорость в расчетном сечении насадка $C - C$ и расход определяются по тем же формулам, что и при истечении из отверстий, т. е. для малых отверстий по формулам (20-8) и (20-16), в которых (при $\varepsilon = 1$)

$$\mu = \varphi\varepsilon = \varphi,$$

а

$$\zeta = \zeta'_{вх} + \zeta_{в.р} + \lambda\frac{l}{d}$$

и

$$\varphi = \mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta'_{вх} + \zeta_{в.р} + \lambda\frac{l}{d}}}, \qquad (20\text{-}48)$$

причем все коэффициенты отнесены к скорости истечения v_c. Поэтому

$$\zeta'_{вх} = \zeta_{вх}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{\zeta_{вх}}{\varepsilon^2_{вх}}, \qquad (20\text{-}49)$$

где $\zeta_{вх}$ — коэффициент сопротивления входа, но отнесенный к сжатому сечению струи, а $\varepsilon_{вх}$ — коэффициент сжатия при входе струи в насадок (коэффициент внутреннего сжатия);

$$\zeta_{в.р} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{вх}}\right)^2 \qquad (20\text{-}50)$$

согласно формуле (15-11). Подставляя эти значения в формулу (20-48), получим

$$\mu = ? = \frac{\varepsilon_{вх}}{\sqrt{\left(\alpha + 1 + \lambda\frac{l}{d}\right)\varepsilon_{вх}^2 + \zeta_{вх} + 1}} = \varepsilon_{вх}. \qquad (20\text{-}51)$$

Несмотря на меньшую скорость истечения через насадок, чем через простое отверстие, расход жидкости через него больше, чем через простое отверстие, благодаря большому значению коэффициента внешнего сжатия ($\varepsilon \approx 1$), по сравнению с отверстием в тонкой стенке (где он доходит до $\varepsilon = 0{,}62$).

Из формулы (20-51) следует, что длина насадка влияет на величину расхода.

В табл. 20-5 приведены значения μ в зависимости от l/d при $Re \approx 100\,000$.

Таблица 20-5

Значения коэффициентов расхода цилиндрических насадков при $H = 10$ *м вод. ст.* (входная кромка — острая, материал насадка — латунь) и срывных напорах $H_{срыв}$ при барометрическом давлении 750 *мм* рт. ст. и температуре воды $t = 15 - 16°$ С (по исследованиям автора[1])

l/d	1,66	3,33	5	6,66	8,33	10	13,32	16,66	20
d, *мм*	9,978	9,983	9,988	9,980	9,973	9,976	9,979	9,989	9,985
Re	98 497	99 290	97 370	100 260	99 140	98 140	95 990	93 990	91 570
μ	0,809	0,814	0,799	0,793	0,787	0,778	0,761	0,743	0,725
$H_{срыв}$, *м. вод. ст.*	14,65	15,5	15,1	15,1	15,[illegible]	16	16,5	—	
После срыва коэффициент расхода принимал значения $\mu = 0{,}603$								—	—

[1] В исследованиях принимал участие инж. П. С. Мучников.

Для чисел Re_m от 30 до 1000 по исследованиям автора для насадка $l/d = 4$ $\mu = 0{,}42 \lg(0{,}05\, Re)$. (20-52)

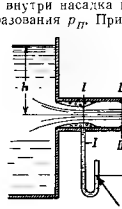
При очень длинном патрубке расход через него может оказаться меньше расхода через простое отверстие.

Приравняв коэффициенты расхода отверстия и насадка, можно вычислить, что их пропускная способность будет одинакова (принимая $\alpha = 1$) при

$$l/d = \frac{2(1 - \varepsilon_{вх})}{\varepsilon_{вх}^2 \lambda}. \qquad (20\text{-}53)$$

Например, при $\varepsilon_{вх} = 0{,}64$ и $\lambda = 0{,}03$ длина насадка $l = 37d$.

Рассмотрим срыв истечения. Теоретически срыв истечения происходит тогда, когда давление внутри насадка падает до величины, равной давлению парообразования $p_п$. При этом наступает явление кавитации. Местом наименьшего давления в насадке является сжатое сечение. Определим, при каком напоре истечения давление в этом сечении падает до этого значения. Напишем уравнение Бернулли для сечений $I - I$ и $II - II$ (фиг. 20-13), выбрав плоскость сравнения проходящей через ось насадка. Принимая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, будем иметь



Фиг. 20-13. Схема истечения через цилиндрический насадок.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{вр}\frac{v_2^2}{2g},$$

где $\zeta_{вр}$ — коэффициент сопротивления, обусловленный расширением струи внутри насадка, определяется по формуле (20-50).

Воспользовавшись уравнением неразрывности в виде

$$v_1 = \frac{v_2\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_2}{\varepsilon_{вх}}$$

и формулой (20-50), получим:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{вх}}\right)^2 - \frac{1}{\varepsilon_{вх}^2}\right],$$

или

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - 2\varphi^2 H_{ист}\frac{1 - \varepsilon_{вх}}{\varepsilon_{вх}}.$$

Так как коэффициент внутреннего сжатия $\varepsilon_{вх} < 1$, то давление p_1 всегда меньше p_2. Этим и обусловливается всасывающая способность насадка, благодаря чему расход через него больше, чем через простое отверстие.

Рассмотрим истечение в атмосферу ($p_2 = p_{ат}$). В этом случае p_1 оказывается меньшим атмосферного, т. е. в сжатом сечении имеет место вакуум.

Величину вакуума найдем по формуле

$$h_в = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = 2\varphi^2 H_{ист}\frac{1 - \varepsilon_{вх}}{\varepsilon_{вх}}. \qquad (20\text{-}54)$$

Для определения предельного значения $h_{в\,пр} = \frac{p_{ат} - p_{п}}{\gamma}$ в формулу (20-54) надо подставить $p_1 = p_п$. При этом получим:

$$H_{ист\,пр} = \frac{\varepsilon_{вх}}{1 - \varepsilon_{вх}} \frac{h_{в\,пр}}{2\varphi^2}. \qquad (20\ 55)$$

В табл. 20-5 приведены данные о насадках, при которых происходил срыв истечения.

При пользовании формулой (20-55) следует иметь в виду, что коэффициент $\varphi = \mu$ для режимов, близких к $H_{ист\,пр}$, имеет значение иное, чем для режимов нормальных. Например, насадок $\frac{l}{d} = 1{,}66$ на режимах вблизи к срывному имел $\varphi = \mu = 0{,}784$ вместо $\varphi = \mu = 0{,}809$ для нормального режима.

При барометрическом давлении, равном 750 *мм* рт. ст. (10,2 *м* вод. ст.), для воды с температурой $t = 15{,}6°$ С

$$h_{в.пр} = 10{,}2 - 0{,}185 = 10{,}015\ м.$$

Принимая

$$\varepsilon_{вх} = 0{,}64, \quad \varphi = 0{,}784,$$

получим:

$$H_{ист.пр} = \frac{0{,}64}{2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}6 \cdot 5} \cdot h_{в.пр} = 1{,}445 \cdot 10{,}015 = 14{,}47\ м.$$

Это значение практически совпадает с данными табл. 20-5.

Заметим, что в коротком насадке срыв истечения часто происходит при значительно меньших напорах, чем это следует из формулы (20-55). Происходит это потому, что окружающему воздуху удается прорваться внутрь насадка в область высокого вакуума и сорвать его. При напорах, близких к срывным, истечение через насадок неустойчиво, поэтому не следует работать с напорами, большими, чем $0{,}7\,H_{ист.пр}$. В длинном насадке, наоборот, срыв истечения может и не произойти. При достижении в сжатом сечении давления $p_п$ наступает предел его нормальной работоспособности. В этом случае расчет надо вести по уравнению истечения из простого отверстия в среду с $p = p_п$ с расчетным сечением ω в сужении. Такое истечение, если оно не сопровождается срывом, назовем кавитационным.

Существенное влияние на истечение через насадок оказывает форма входной кромки. Скругление ее улучшает истечение и повышает коэффициент расхода для квадратичных режимов при $\frac{l}{d} = (3 \div 4)$ до $\mu = 0{,}95$ и приближает эти насадки к коноидальным.

20-7. Истечение жидкости через коноидальные насадки

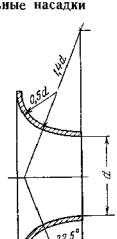
Коноидальные насадки (фиг. 20-14). Коноидальными насадками называются насадки, имеющие форму струи, выходящей из отверстия. Эти насадки дают наибольшие значения коэффициента расхода. Коэффициент сужения таких насадков равен единице.

Величина коэффициента расхода и скорости может определяться[1] по табл. 20-6.

Таблица 20 6

Значения коэффициента расхода и скорости для коноидальных насадков

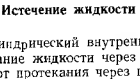
$Re = \frac{vd}{\nu}$	25 000	50 000	100 000	200 000	450 000	1 100 000
$d = 2{,}8$ *см*	0,947	0,955	0,962	0,967	0,972	—
$d = 7{,}0$ *см*	—	0,957	0,964	0,970	0,975	0,979



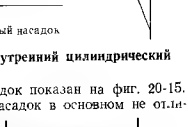
Фиг. 20-14. Коноидальный насадок

20-8. Истечение жидкости через внутренний цилиндрический насадок

Цилиндрический внутренний насадок показан на фиг. 20-15. Протекание жидкости через такой насадок в основном не отличается от протекания через внешний насадок. Во внутреннем насадке происходит лишь большее сжатие струи при входе в насадок и резче проявляется последующее расширение струи. Поэтому гидравлическое сопротивление внутреннего цилиндрического насадка больше, чем внешнего.



Фиг. 20-15 Схема истечения через цилиндрический внутренний насадок.



Фиг. 23-16. Схема истечения через цилиндрический насадок при срыве.

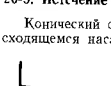
[1] Mueller u Peters, Durchflusszahlen der Normalduse VDJ, 1926, стр 966.

Коэффициент внешнего сжатия $\varepsilon = 1$, а $\varphi = \mu$. Для квадратичной области $\varphi = \mu = 0{,}71$.

Короткие внутренние насадки, если они предварительно не были заполнены жидкостью, уже при сравнительно небольших напорах работают как простые отверстия с коэффициентом расхода в квадратичной области $\mu = 0{,}5 - 0{,}54$ (фиг. 20-16)

20-9. Истечение жидкости через конический сходящийся насадок

Конический сходящийся насадок (фиг. 20-17) В коническом сходящемся насадке явление внутреннего сжатия сказывается меньше, чем в цилиндрическом насадке, но зато появляется сжатие струи по выходе из насадка. Это влечет за собой, с одной стороны, увеличение коэффициента скорости, а с другой стороны, уменьшение коэффициента сжатия. Поэтому при малых углах конусности коэффициент расхода сначала увеличивается и, достигнув максимума при угле 13°24′, начинает убывать.



Фиг. 20-17. Схема истечения через конический сходящийся насадок

В табл. 20-7 приведены средние значения коэффициентов скорости и расхода для конических сходящихся насадков для квадратичных режимов.

Таблица 20-7

Значения коэффициентов расхода, скорости и сжатия для конических сходящихся насадков

Углы	0°	2°	3°	4°	5°	6°	8°	10°
Коэффициент расхода μ	0,829	0,873	0,892	0,909	0,920	0,925	0,931	0,937
Коэффициент скорости φ	0,829	0,873	0,892	0,909	0,920	0,925	0,933	0,949
Коэффициент сжатия ε	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,998	0,987

Продолжение

Углы	13°24′	15°	20°	30°	35°	45°
Коэффициент расхода μ	0,942	0,946	0,938	0,898	0,883	0,857
Коэффициент скорости φ	0,955	0,963	0,969	0,974	0,977	0,983
Коэффициент сжатия ε	0,986	0,982	0,968	0,932	0,919	0,904	0,857

20-10. Истечение жидкости через конический расходящийся насадок

В коническом расходящемся насадке расширение струи происходит (фиг. 20-18) более резко, чем в цилиндрическом. Поэтому его гидравлическое сопротивление больше, а коэффициент скорости φ меньше.

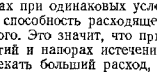
В расходящемся насадке $\varepsilon = 1$ и поэтому

$$\varphi = \mu.$$

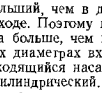
Вследствие того, что в расходящемся насадке

$$\frac{\Omega}{\omega} > 1,$$

в сжатом сечении создается вакуум, больший, чем в других насадках при одинаковых условиях на выходе. Поэтому всасывающая способность расходящегося насадка больше, чем цилиндрического. Это значит, что при одинаковых диаметрах входных отверстий и напорах истечения через расходящийся насадок будет протекать больший расход, чем через цилиндрический.



Фиг. 20-18. Схема потока через конический расходящийся насадок.



Фиг. 20-19. Конический расходящийся насадок с скругленной кромкой.

Вследствие более высокого вакуума, создающегося в сжатом сечении, срыв истечения через расширяющийся насадок происходит при меньшем напоре, чем в цилиндрическом. На срыв истечения существенное влияние оказывает угол конусности насадка, а также форма входной кромки. Скругление входной кромки (фиг. 20-19) улучшает истечение и повышает коэффициент расхода.

Коэффициент скорости и расхода конического расходящегося насадка с острой входной кромкой, отнесенный к площади на выходе из насадка, может вычисляться по формуле (20-5), но с учетом только коэффициента сопротивления вследствие расширения. В этом случае

$$\varphi = \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d_2^2}{\varepsilon_{вх} d_1^2} - 1\right)^2}}. \qquad (20\text{-}56)$$

Например, для насадка длиной $l = 40$ *мм*, $d_1 = 10$ *мм*, $d_2 = 13{,}5$ *мм* (что соответствует $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 0{,}0437$, $\theta = 5^\circ$ и $\varepsilon_{вх} = 0{,}64$) будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{13{,}5^2}{0{,}64 \cdot 10^2} - 1\right)^2}} = 0{,}475.$$

Для конического расходящегося насадка с скругленной входной кромкой (фиг. 20-19) коэффициент расхода можно определить, рассматривая его, как диффузор.

Для того чтобы оценить некоторые преимущества расходящихся насадков, в табл. 20-8 приведены характеристики различных форм отверстий и насадков.

Таблица 20-8

Сравнительные данные различных видов отверстий и насадков

Форма отверстий и насадков	Коэффициент скорости φ	Коэффициент расхода μ	Удельная энергия, уносимая потоком	Мощность уносимая, в долях от теоретической
Круглое отверстие в тонкой стенке	0,970	0,625	$0{,}941\,H$	0,588
Внешний цилиндрический насадок	0,820	0,820	$0{,}672\,H$	0,551
Внутренний цилиндрический насадок	0,710	0,710	$0{,}504\,H$	0,358
Конический сходящийся насадок с углом 13°24′	0,963	0,946	$0{,}927\,H$	0,877
Конодальный насадок	0,980	0,980	$0{,}960\,H$	0,941
Конический расходящийся насадок с углом 5°	0,475	0,475	$0{,}226\,H$	0,107

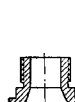
Таблица показывает важное преимущество конического расходящегося насадка. Он дает наименьшее значение мощности, уносимой потоком. Поэтому эти насадки получили широкое распространение как «отсасывающие трубы» гидравлических турбин и в ряде других случаев, где требуется свести до минимума энергию в отходящем потоке.

20-11. Истечение жидкости через распылители

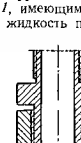
На фиг. 20-20—20-22 показаны распылители, применяющиеся в качестве форсунок для распыла топлива, наконечников моечных рукавов и в пожарном деле. В распылителе с винтовым вкладышем (фиг. 20-20) жидкость в камере перед выходным отверстием находится во вращательном движении. Покидая распылитель, струя развертывается в конус. Коэффициент расхода

такого распылителя[1] с диаметром отверстия $d = 7$ *мм* равен $\mu = 0{,}24$.

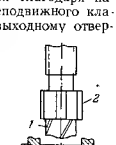
В распылителе типа форсунки (фиг. 20-21) закручивание потока и развертывание струи в конус создаются благодаря направляющим каналам *1*, имеющимся в теле неподвижного клапана *2*, через которые жидкость поступает к выходному отвер-



Фиг. 20-20. Распылитель с винтовым вкладышем



Фиг. 20-21. Распылитель типа форсунки



Фиг. 20-22. Комбинированный распылитель

стию. Коэффициент расхода $\mu = 0{,}4$ (диаметр отверстия $d = 0{,}1$ *см*).

В комбинированном распылителе (фиг. 20-22) каналы *1* находятся в подвижном клапане *2*. Жидкость протекает через распылитель или как в форсуночном, или как через простое отверстие *3*. Режим работы зависит от положения подвижного (регулировочного) клапана. Коэффициент расхода изменяется в пределах $\mu = 0{,}4 \div 0{,}65$ для $d = 2{,}9$ *мм*. Значения коэффициента μ для двух последних распылителей приведены по исследованиям автора.

20-12. Траектория свободной струи. Дальность боя

Струя называется свободной, если она движется в газовом пространстве[2], в отличие от несвободной (напорной), которая со всех сторон ограничена твердыми стенками канала. Примером свободной струи служит струя, вытекающая из отверстия в резервуаре, струя из пожарного брандспойта и т. п.

Уравнение теоретической траектории свободной струи выводится из предположения, что все ее частицы движутся совершен-

[1] Н. А. Тарасов-Агалаков, Практическая гидравлика в пожарном деле, Издательство Министерства коммунального хозяйства РСФСР, 1950.

[2] Свободная струя может втекать и в затопленное пространство. В этом случае она тоже называется свободной, но затопленной. В учебнике этот случай не изучается.

но одинаково, причем каждая, как свободная материальная точка в пустоте. В этом случае уравнение траектории в параметрической форме может быть представлено в виде (фиг. 20-23):

$$x = v\cos\theta t; \tag{20-57}$$

$$y = v\sin\theta t - \frac{gt^2}{2}, \tag{20-58}$$

где v — начальная скорость;
θ — угол наклона начальной скорости к горизонту;
t — время

Исключая время, получим:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}. \tag{20-59}$$

Полагая в формуле (20-59) $y = 0$, определим $x = l_m$ — теоретическую дальность полета струи (дальность боя)

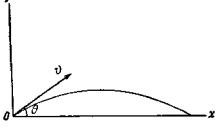
$$l_m = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}, \tag{20-60}$$

откуда следует, что теоретическая максимальная дальность боя будет при $\theta = 45°$

$$l_{m.макс} = \frac{v^2}{g}. \tag{20-61}$$

Формула (20-61) дает хорошее совпадение с опытом лишь при напорах истечения $H_{истм} = 3{,}5 \div 7$ *м*.

При напоре 10 *м* наибольшая дальность боя достигается при $\theta = 35°$—$40°$, а при напоре 35 *м* — при $\theta = 30°$—$34°$.

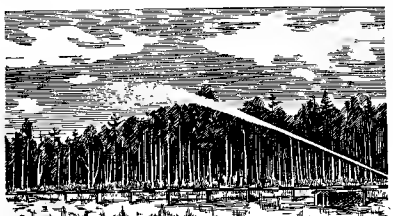


Фиг. 20-23. Теоретическая траектория струи

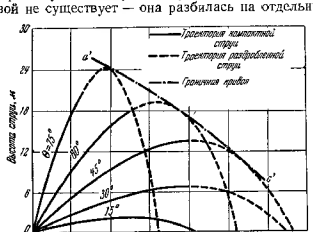
На дальность боя и высоту подъема оказывают влияние сопротивление воздуха и ветер. При этом на дальность боя ветер влияет больше, чем на высоту подъема.

Несовпадение теоретических и практических данных объясняется сложной структурой струи, благодаря чему движение ее частиц как отдельных материальных точек, не встречающих на пути сопротивлений, является лишь грубой моделью. На фиг. 20-24 показана струя жидкости, вытекающей из насадка $d = 19$ *мм* при напоре 60 *м* вод. ст. Фотография позволяет различать в струе три участка: первый участок — непосредственно после вылета из отверстия — участок цельной компактной струи;

второй участок — участок раздробленной струи, на котором компактность (цельность) струи нарушается и струя дробится на


Фиг. 20-24. Струя.

отдельные струи, но еще не разбивается на отдельные капли, и, наконец, третий участок — участок распыленной струи, где струи как таковой не существует — она разбилась на отдельные капли.



Фиг. 20-25 Траектории струи при разных наклонах.

В начальной стадии разрушение компактной струи происходит главным образом вследствие сопротивлений воздуха. На распад струи оказывают влияние и сложные колебательные явления, возникающие в ней. На фиг. 20-25 показаны траектории струи

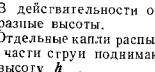
при разных углах наклона. Наиболее полно экспериментально изучены вертикальные струи.

Свободная незатопленная вертикальная струя, покидающая насадок со скоростью v, направленной вертикально вверх, теоретически поднимается, как это следует из формулы (20-58), на высоту h_m

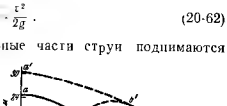
$$h_m = \frac{v^2}{2g}. \qquad (20\text{-}62)$$

В действительности отдельные части струи поднимаются на разные высоты.

Отдельные капли распыленной части струи поднимаются на высоту $h_{кап}$.



Фиг. 20-26 Насадка



Фиг 20-27. Наклонные струи.

Относительная потеря высоты, обусловленная, главным образом, сопротивлением окружающего воздуха, равна

$$h\psi_1 = \frac{h - h_{кап}}{h_{кап}}. \qquad (20\text{-}63)$$

Здесь h — полный напор в начале насадка, а коэффициент ψ_1 зависит от формы насадка и определяется опытным путем.

Для насадков, имеющих форму, показанную на фиг. 20-26,

$$\psi_1 = \frac{0{,}25}{d_{(мм)} + 0{,}001 d^3_{(мм)}}. \qquad (20\text{-}64)$$

Значение ψ_1 приведено в табл 20-9. Формула (20-63) может служить для определения высоты подъема отдельных капель. Из нее следует

$$h_{кап} = \frac{h}{1 + \psi_1 h}. \qquad (20\text{-}65)$$

Таблица 20-9

Значения коэффициента ψ_1 в формуле (20-63)

Диаметр насадка, м	0,010	0,013	0,016	0,019	0,022	0,025
ψ_1	0,0228	0,0165	0,0124	0,0097	0,0077	0,0061

Струя раздробленным сечением поднимается на высоту

$$h_p = (0{,}948 \div 0{,}95) h_{кап}. \qquad (20\text{-}66)$$

Компактная струя сохраняется до высоты $h_{ком}$, определяемой в зависимости от $h_{кап}$, согласно табл. 20 10.

Таблица 20-10

Высота подъема сильной хорошей струи

Высота поднятия отдельных капель $h_{кап}$, м	15,2	22,9	30,5	38,1	45,7
Высота поднятия сильной хорошей (компактной) струи $h_{ком}$, м	13,38	18,10	22,27	25,53	28,72
Отношение $\frac{h_{ком}}{h_{кап}} = \psi$	0,88	0,79	0,73	0,67	0,63

При гидравлических расчетах наклонных свободных струй принимают (фиг. 20 27):

а) расстояние от спрыска (насадка) до границы компактных струй равным $r = \psi h_{кап}$, т. е. принимают граничную линию компактной части струи за окружность (см табл. 20-10);

б) расстояние от спрыска до граничной кривой распыленных струй равным:

$$l = \psi_2 h_{кап}, \qquad (20\text{-}67)$$

где ψ_2 — коэффициент, зависящий от угла θ наклона линии, соединяющей спрыск с точкой на граничной кривой.

Значения ψ_2 приведены в табл 20 11.

Таблица 20-11

Значения коэффициента ψ_2 в формуле, определяющей границу распыленной струи

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
ψ_2	1,40	1,30	1,20	1,12	1,07	1,03	1,00

Гидромониторные струи. Для приближенного определения дальности боя гидромониторной струи[1] можно воспользоваться эмпирической формулой Н П. Гавырина

$$l = 0{,}415 \sqrt{\psi^6 d_0 H^2}, \qquad (20\text{-}68)$$

[1] Гидромонитором называется аппарат, дающий сильную струю и используемый для размыва грунта. Представляет собой поворачивающийся ствол, заканчивающийся насадком. Гидромонитор получает питание от специальной насосной установки.

где l — дальность боя струи, *м*,

θ° — угол струи к горизонту, градусы,

d_0 — диаметр насадка, *мм*;

H — напор на выходе из насадка, *м*.

Формула (20 68) применима при $\theta = 5^\circ \div 32^\circ$, $d_0 = 5 \div 50$ *мм* и $H = 30 \div 80$ *м* Наибольная дальность боя струи получается при $\theta = 30^\circ$ и $H = 35$ *м* и при $\theta = 35^\circ$ для $H = 10$ *м*.

Задача 20-1. Определить расход и скорость истечения (фиг. 20-10) воды через круглое отверстие в тонкой стенке, если площадь отверстия $\omega = 50$ *см*², $h_T = 5$ *м*, а кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0{,}01$ *см*² *сек*.

Как изменятся расход и скорость, если отверстие будет снабжено цилиндрическим насадком с $l/d = 3{,}33$?

Решение. Расход Q через круглое отверстие определим по формуле (20 46).

В этой формуле для данных размеров можно принять выражение, стоящее в квадратных скобках, равным единице, а коэффициент μ принять согласно табл. 20-3 равным $\mu = 0{,}597$. То же получается, если применить формулу (20-25). После подстановки получим

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gh_T} = 0{,}597 \cdot 0{,}005 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5} = 0{,}0295 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Присоединяя к отверстию насадок, будем иметь:

$$Re_m = \frac{7{,}98 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^4}}{0{,}01} = 780\,000;$$

согласно табл. 20-5 $\mu = 0{,}814$;

$$Q = 0{,}814 \cdot 0{,}005 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = 0{,}0406 \text{ м}^3/\text{сек}.$$

Благодаря насадку расход увеличился в 1,37 раза.

Скорость истечения через отверстие

$$v = \varphi\sqrt{2gh} = 0{,}98 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = 9{,}607 \text{ м/сек}.$$

Скорость истечения через насадок

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{0{,}0406 \cdot 10^4}{50} = 8{,}12 \text{ м/сек}.$$

Благодаря насадку скорость уменьшилась в 1,18 раза

Задача 20-2. Требуется определить расход бензина через калиброванное отверстие a устройства, показанного на фиг. 20 28

Дано площадь отверстия $\omega = 2 \cdot 10^{-6}$ *м*²; кинематический коэффициент вязкости бензина $\nu = 0{,}006$ *см*²/*сек*; высота обреза отверстия b колпака резервуара B $H = 0{,}02$ *м*.

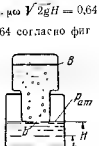
Решение. Герметический резервуар B (колпак), имеющий отверстие b, заполнен жидкостью, которая вытекает в резервуар A. Пространство, освобождаемое в колпаке, заполняется воздухом, всасываниями через то же отверстие b Истечение жидкости через отверстие a начнется после того, как уровень жидкости в резервуаре A станет выше уровня отверстия a. Повышение уровня жидкости в резервуаре A будет происходить до тех пор, пока она не перекроет отверстие b, т е. поднимется на высоту h H. Начиная с этого момента, количество жидкости, вытекаемой из резервуара B в резервуар A, в точности будет равно расходу ее через калиброванное отверстие a.

Таким образом, в данном приборе истечение жидкости через отверстие a будет происходить под постоянным напором $h = H$ до тех пор, пока не вытечет вся жидкость из колпака. После этого начнется понижение уровня истечения. Истечение прекратится, когда h станет равным нулю.

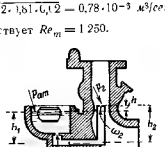
Итак

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}64 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}02} = 0{,}78 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{сек},$$

где $\mu = 0{,}64$ согласно фиг 20 5 соответствует $Re_m = 1\,250$.



Фиг. 20 28 К задаче 20 2.



Фиг 20 29 Схема двухжиклерного карбюратора

Задача 20-3. Определить расход горючего, протекающего через два калиброванных отверстия карбюратора (фиг. 20-29), согласно следующим данным.

Давление в поплавковой камере $p_1 = p_{am}$ Давление в диффузоре $p_2 = 8\,800$ *кГ*/*м*², коэффициент расхода первого калиброванного отверстия $\mu_1 = 0{,}7$, второго $\mu_2 = 0{,}715$ Площадь отверстия $\omega_1 = 2$ *мм*², $\omega_2 = 1$ *мм*². Объемный вес горючего $\gamma = 750$ *кГ*/*м*². Потерями в подводящих каналах пренебречь.

Решение. Обозначим давление в промежуточной точке через p_0. Тогда расход Q через первое калиброванное отверстие будет равен согласно формуле (20-16)

$$Q_1 = \mu_1\omega_1\sqrt{2g\left(\frac{p_{am} - p_0}{\gamma} + h_1\right)}$$

Аналогично расход Q_2 будет равен

$$Q_2 = \mu_2\omega_2\sqrt{2g\left(\frac{p_0 - p_2}{\gamma} - h_2\right)},$$

но

$$Q_1 = Q_2.$$

Решая эти два уравнения, получим:

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu_1^2\omega_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2\omega_2^2}\right) = \frac{p_{am} - p_2}{\gamma} - h,$$

откуда

$$Q = \frac{\mu_2\omega_2\sqrt{2g\left(\frac{p_{am} - p_2}{\gamma} - h\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_2\omega_2}{\mu_1\omega_1}\right)^2}}$$

В этой формуле числитель выражает расход горючего, протекающего через второе калиброванное отверстие при отсутствии первого калиброванного отверстия, знаменатель формулы есть число, показывающее, во сколько раз уменьшается расход горючего через второе калиброванное отверстие при наличии первого калиброванного отверстия.

Подставляя числовые значения в формулу расхода и пренебрегая h, найдем

$$Q = \frac{0{,}715\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1+\left(\frac{0{,}715}{0{,}7}\right)^2\cdot 0{,}25}}\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot\left(\frac{10\,000-8\,800}{750}\right)} =$$

$$= 3{,}6\cdot 10^{-6}\ м^3/сек = 3{,}6\ см^3/сек.$$

Задача 20-4. Определить расход воды из пожарной колонки согласно следующим данным. Избыточное давление в пожарной колонке $p_u/\gamma = 35$ *м* вод. ст.; длина гибкого пенькового рукава $l_1 = 100$ *м*; диаметр рукава $d_1 = 0{,}65$ *мм*, расчетный диаметр рукава согласно фиг. 14-13 $d_0 = 73$ *мм*; пожарный насадок (фиг. 20-26) $d_2 = 0{,}025$ *м*. Определить также соответствие данной водопроводной сети требованиям пожарной безопасности, принимая высоту конька наивысшего здания 10 *м* и потребную подачу 20 *л/сек*.

Решение. Для решения первого вопроса задачи применим уравнение Бернулли для потока реальной жидкости. Приняв плоскость сравнения и сечения I и II, для которых пишем уравнение Бернулли, как показано на фиг. 20-30, будем иметь

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \zeta_2\frac{v_2^2}{2g} + \lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \zeta_1\frac{v^2}{2g}.$$

Определяем значение каждого из членов уравнения Бернулли $z_1 = z_2$; $\frac{p_1-p_2}{\gamma} = 35$ *м* вод. ст. согласно условию задачи, $v_1 \approx 0$. Движение принимаем турбулентным и $\alpha = 1{,}1$, $\zeta_1 = 0{,}50$ — коэффициент сопротивления при входе в шланг; для шланга согласно фиг. 14-13 и 14-14 $\lambda = 0{,}025$; $\zeta_2 = 0{,}05$ — коэффициент сопротивления насадка.

Подставляя найденные значения в уравнение Бернулли, получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_1-p_2}{\gamma}+z_1-z_2\right)}{\alpha_2+\zeta_2+\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2\left(\zeta_1+\lambda\frac{l}{d}\right)}};$$

$$\sqrt{\frac{2g35}{1+0{,}05+0{,}0137\left(0{,}50+0{,}025\frac{100}{0{,}073}\right)}} = 21{,}4\ м/сек.$$

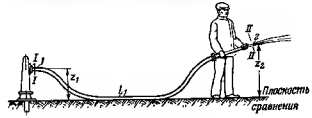
Расход

$$Q = v_2\omega_2 = 21{,}4\,\frac{\pi\,0{,}25^2}{4} = 10{,}5\ л/сек.$$

Для того чтобы проверить, удовлетворяет ли данная сеть условиям пожара, помещаем мундштук ствола на высоте 10 *м*. В этом случае

$$v_{пож} = \sqrt{\frac{35-10}{0{,}0074}} = 18\ м/сек;$$

$$Q_{пож} = 180\pi\frac{0{,}25^2}{4} = 8{,}85\ л/сек.$$



Фиг. 20-30. К задаче 20-4

Согласно нормам при подаче на пожар 20 *л/сек* требуется четыре струи по 5 *л/сек*. Таким образом, этому условию струя удовлетворяет.

Теоретическое значение высоты подъема по формуле

$$h_m = \frac{v_{пож}^2}{2g} = 16{,}4\ м.$$

Найдем действительную высоту подъема струи. Для этого вычислим:

$$H_{гд} = h - \frac{v_{пож}^2}{2g} + \zeta\frac{v_{пож}^2}{2g} = \left(1+0{,}05\right)\frac{18^2}{2g} = 17{,}2\ м.$$

Согласно формуле (20-65) высота поднятия отдельных капель

$$h_{кап} = \frac{h}{1+\Phi_1 h} = \frac{17{,}2}{1+0{,}0061\cdot 17{,}2} = 16{,}3\ м;$$

компактная струя будет согласно табл. 20-10 до высоты

$$h_{ком} = 0{,}86\,h_{кап} = 14{,}02\ м$$

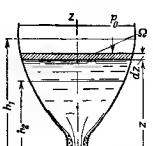
Глава двадцать первая

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ РЕЗЕРВУАРОВ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ УРОВНЯХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОПОРОЖНЕНИЯ РЕЗЕРВУАРОВ

21-1. Определение времени опорожнения резервуара. Общий случай

При исследовании истечения жидкостей через отверстия и насадки при переменном уровне надо было бы исходить из уравнения Бернулли для неустановившегося движения. Однако обычно влияние инерционного напора оказывается незначительным и им можно пренебречь.

Для определения времени опорожнения резервуара (фиг. 21-1) воспользуемся уравнением неразрывности, согласно которому объем жидкости, вытекшей из резервуара за время dt,



Фиг 21 1. Общий случай истечения под переменным уровнем.

равный $dW = Qdt$, равен объему Ωdz, освободившемуся в резервуаре при опускании уровня на dz,

$$-\Omega dz = Qdt,$$

откуда

$$t = -\int_{h_1}^{h_2} \frac{\Omega dz}{Q}, \qquad (21\text{-}1)$$

где Ω — в общем случае переменная площадь сечения резервуара, совпадающая со свободной поверхностью,

Q — расход жидкости, вытекающей через сливное устройство, соответствующий некоторому положению уровня

для ламинарного истечения ($Re < 5$) определяем по формулам (20-11) и (20-13), что дает для круглого отверстия

$$Q = \frac{\pi g d^3}{96\nu}\left[z + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right]; \qquad (21\text{-}2)$$

для турбулентного истечения (или для $Re > 50$) по формуле (20-16)

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\left(z + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}. \qquad (21\text{-}3)$$

Уравнение (21-1) может быть проинтегрировано, если известны зависимости Q и Ω от z.

21-2. Определение времени истечения жидкости из резервуара с постоянным поперечным сечением по высоте

Для определения времени истечения жидкости из резервуара с постоянным поперечным сечением по высоте воспользуемся уравнением (21-1). Особенностью рассматриваемого случая является то, что площадь поперечного сечения свободного уровня при понижении уровня сохраняет постоянное значение (фиг. 21 2). Рассмотрим случай, когда $h = 0$, а p_0 и p_c не изменяются при истечении. В этом случае при ламинарном истечении ($Re < 5$)

$$t = \frac{96\nu\Omega}{\pi g d^3}\cdot\int_0^h \frac{d\left(z + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}{\left(z + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)} = \frac{96\nu\Omega}{\pi g d^3}\cdot\ln\frac{h + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}}{\frac{p_0 - p_c}{\gamma}}. \qquad (21\text{-}4)$$

При турбулентном истечении, принимая μ постоянным и равным его некоторому среднему значению, получим для $h_1 \neq 0$

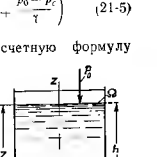
$$t = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\cdot\int_{h_1}^{h+h_1}\frac{dz}{\sqrt{z + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}}},$$

откуда

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\cdot\left(\sqrt{h + h_1 + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}} - \sqrt{h_1 + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}}\right) \qquad (21\text{-}5)$$

Обозначая $\frac{p_0 - p_c}{\gamma} = \delta h$, представим расчетную формулу в виде

$$t = \frac{2\Omega h}{\mu\omega\sqrt{2gh}}\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{h_1 + \delta h}{h}} - \sqrt{\frac{h_1 + \delta h}{h}}\right). \qquad (21\text{-}6)$$



Фиг. 2.-2. Истечение под переменным уровнем из резервуара с постоянным сечением.

Если $\delta h = 0$ и истечение происходит из отверстия или из насадка, длина которого h_1 весьма мала по сравнению с h, для t будем иметь:

$$t = \frac{2\Omega h}{\mu\omega\sqrt{2gh}} = \frac{W}{\mu\omega\sqrt{2g0{,}25h}}. \qquad (21\text{-}7)$$

В последней формуле $W = \Omega h$ есть объем вытекшей жидкости. Таким образом, если не считаться с изменением коэффициента расхода μ, время истечения можно определить из предположения, что истечение происходит с постоянным напором, равным $0{,}25h$.

21-3. Определение времени истечения жидкости из резервуара с переменным поперечным сечением

Рассмотрим случай истечения жидкости из нижнего отверстия железнодорожной цистерны (фиг. 21-3). Определим время опорожнения.

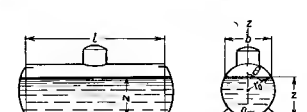
В отличие от предыдущего случая Ω меняется по высоте, но может быть выражена в зависимости от z. Из чертежа следует:

$$\Omega = lb,$$

где $b = 2r_0\sin\theta$,

или

$$b = 2\sqrt{r_0^2 - (z - r_0)^2} = 2\sqrt{2r_0 z - z^2}.$$



Фиг. 21.3. Истечение под переменным уровнем из железнодорожной цистерны через отверстие.

Подставляя в уравнение (21-1) значение Ω, получим:

$$t = \int_0^{2r_0} \frac{2lr_0 \sin\theta}{Q} \cdot dz. \tag{21-8}$$

Рассмотрим сначала случай ламинарного истечения при $p_0 = p_c$. Имея в виду, что $z = r_0(1 + \cos\theta)$, получим

$$t = \frac{2l\,96\nu r_0}{\pi g d^3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} d\theta = \frac{192\nu r_0}{g d^3}. \tag{21-9}$$

Для турбулентного движения получим:

$$t = \int_0^{2r_0} \frac{2l}{\mu\omega\sqrt{2g}} \sqrt{2r_0 - z}\,dz = \frac{8}{3}\frac{lr_0}{\mu\omega} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{g}}. \tag{21-10}$$

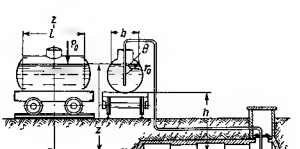
Умножая числитель и знаменатель на $\pi \sqrt{2r_0}$ и обозначая объем цистерны $W = l\pi r_0^2$, будем иметь:

$$t = \frac{W}{\mu\omega\sqrt{2g}\,0{,}694\,r_0}. \tag{21-11}$$

Таким образом, если не считаться с изменением коэффициента расхода, время турбулентного истечения можно определить из предположения, что истечение происходит с постоянным напором, равным $0{,}694 r_0$. При расчете по среднему напору, равному r_0, время слива оказалось бы меньше на 20%.

Дополнительно рассмотрим турбулентное истечение по достаточно длинной трубе, когда $p_0 \neq p_c$ и $h \neq 0$ (фиг. 21-4).

Так же как и в предыдущем случае, Ω не есть постоянная величина, она меняется по высоте. Для последующего будет целесообразным выра-



Фиг. 21.4. Истечение под переменным уровнем из железнодорожной цистерны при значительном h

зить Ω как функцию угла θ, показанного на фиг. 21-4, при этом будем иметь:

$$\Omega = 2r_0 \sin\theta;$$
$$z = h + r_0 + r_0\cos\theta,$$
$$dz = -r_0 \sin\theta\, d\theta.$$

Подставляя эти значения в уравнение (21-1), найдем

$$t = \frac{2lr_0^2}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{h + r_0 + r_0\cos\theta + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}}}. \tag{21-12}$$

Обозначим

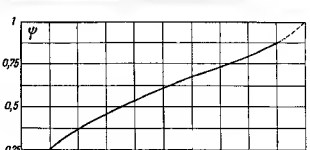
$$\frac{r_0}{h + r_0 + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}} = \kappa, \tag{21-13}$$

при этом выражение (21-12) можно представить в виде

$$t = \frac{2lr_0^2}{\mu\omega\sqrt{2g\left(h + r_0 + \frac{p_0 - p_c}{\gamma}\right)}} \cdot \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos^2\theta)}{\sqrt{1 + \kappa\cos\theta}} d\theta. \tag{21-14}$$

Разложим $\sqrt{1 + \kappa\cos\theta}$ в ряд по формуле бинома Ньютона. После соответствующих преобразований, сохранив только члены с $\cos^4\theta$ в четной степени, получим

$$\int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos^2\theta)}{\sqrt{1 + \kappa\cos\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} \left[1 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\kappa^2 - 1\right)\cos^2\theta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\kappa^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\kappa^2\right)\cos^4\theta \right] d\theta.$$



Фиг. 21-5. Зависимость коэффициента ψ от κ при сливе из железнодорожной цистерны.

После интегрирования будем иметь:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1+\kappa\cos\theta}} = \pi\left(0{,}5 + \frac{3}{64}\kappa^2 + 0{,}0171\,\kappa^4 + 0{,}0088\,\kappa^6 + 0{,}00537\,\kappa^8 + 0{,}00363\,\kappa^{10}\ldots\right).$$

Таким образом, для времени истечения получаем

$$t = \frac{2\pi r_0^2}{\mu\omega\sqrt{2g\frac{r_0}{\kappa}}}\cdot(0{,}5 + 0{,}0468\,\kappa^2 + 0{,}0171\,\kappa^4 + 0{,}0088\,\kappa^6 + 0{,}00537\,\kappa^8 + 0{,}00363\,\kappa^{10});$$

$$t = \frac{1{,}2\,\pi r_0^2}{\mu\omega\sqrt{2gr_0}}\cdot[1{,}666\cdot(0{,}5\,\kappa^{1/2} + 0{,}0468\,\kappa^{5/2} + 0{,}0171\,\kappa^{9/2} + 0{,}0088\,\kappa^{13/2} + 0{,}00537\,\kappa^{17/2} + 0{,}00363\,\kappa^{21/2})], \quad (21\text{-}15)$$

$$t = \psi\frac{W}{\mu\omega\sqrt{2g0{,}694r_0}}. \quad (21\text{-}16)$$

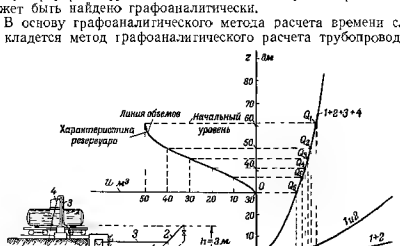
Выражение, стоящее перед прямыми скобками, согласно формуле (21-11) определяет время истечения из отверстия в предположении, что $p_0 = p_c$ и $h = 0$. Выражение, взятое в квадратные скобки, которое обозначено через ψ, является коэффициентом, определяющим уменьшение времени слива по сравнению со случаем при одинаковых коэффициентах расхода, разобранным раньше. Из выражения для ψ легко убедиться, что оно всегда меньше единицы и принимает значение, равное единице, при предельном значении $\kappa = 1$.

Для облегчения пользования формулой для ψ приведен график его значений в зависимости от κ (фиг. 21-5)

21-4. Графоаналитический метод определения времени слива

В тех случаях, когда сечения резервуаров или водохранилищ не имеют правильной геометрической формы, не представляется возможным выразить аналитически площадь поперечного сечения резервуара в функции высоты. В этих случаях время слива может быть найдено графоаналитически.

В основу графоаналитического метода расчета времени слива кладется метод графоаналитического расчета трубопроводов,



Фиг. 21-6. Графоаналитический метод расчета слива из железнодорожной цистерны

изложенный в гл. 17. Применение его покажем на примере истечения жидкости из железнодорожной цистерны (фиг. 21-6).

Для определения времени слива необходимо построить две характеристики: характеристику трубопровода, по которому происходит истечение, и характеристику резервуара (цистерны).

Характеристика трубопроводов строится обычным способом. В том случае, если трубопровод разветвленный, как показано на фиг. 21-6, результирующая характеристика находится путем сначала параллельного сложения характеристик трубопроводов *1* и *2*, а затем последовательного прибавления к суммарной характеристике $(1+2)$ характеристики трубопровода *3* и др.

Характеристика резервуара представляет собой зависимость объема жидкости в резервуаре от высоты уровня (линия объ-

емов). Разделим ось объемов в пределах заданного объема на n равных частей и проведем через точки деления вертикали до пересечения с характеристикой резервуара. Из точек пересечения проводим горизонтали до пересечения их с результирующей характеристикой трубопроводов.

Точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, Q_{n+1}$ определяют производительности, соответствующие переменным уровням в резервуаре.

За время вытекания объема $\frac{W}{n}$ расход в трубопроводе меняется с Q_i до Q_{i+1}.

Если принять, что за это время средний расход равнялся

$$Q_{ср} = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2},$$

то время, которое потребовалось для слива объема $\frac{W}{n}$ (при соответствующем уровне), можно определить по формуле

$$\delta t = \frac{W}{n} \Big/ \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}.$$

Общее время слива будет равно

$$t = \Sigma \delta t = \frac{2W}{n}\left(\frac{1}{Q_1 + Q_2} + \frac{1}{Q_2 + Q_3} \ldots + \frac{1}{Q_n + Q_{n+1}}\right). \qquad (21\ 17)$$

Задача 21-1. Рассчитаем время слива железнодорожной цистерны с бензином типа 4 по схеме, изображенной на фиг. 21 6, согласно следующим данным: длина шланга 4 $l_4 = 20$ *м*, диаметр шланга $d_4 = 75$ *мм*; длина магистрального трубопровода 3 $l_3 = 150$ *м*, диаметр $d_3 = 80{,}5$ *мм*; длина раздаточных трубопроводов 2 и 1 $l_{1,2} = 10$ *м* и диаметр $d_{1\ и\ 2} = 80{,}5$ *мм*. Шероховатость металлических трубопроводов $\Delta = 0{,}6$ *мм*.

Для упрощения расчет произведен в предположении квадратичной области сопротивлений.

В рассматриваемой схеме шланг 4 и трубопровод 3 работают последовательно, трубопроводы 2 и 1 параллельно.

Для нахождения результирующей характеристики всей системы составим уравнения характеристик каждого из трубопроводов.

Трубопроводы 1 и 2

$$z_1 = z_2 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_з + \zeta_о + \zeta_{задв} + \alpha\right) \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} =$$

$$= \left(0{,}034 \frac{10}{0{,}0805} + 0{,}137 + 3{,}6 + 1{,}2 + 1\right) \frac{Q^2}{196{,}2 \cdot 0{,}259} = 0{,}2\, Q^2\ дм.$$

Трубопровод 3

$$z_3 = \left(\lambda \frac{l}{d} + 3\zeta_{задв} + \zeta_{ф.\ пр} + 6\zeta_з\right) \frac{Q^2}{2g\omega_3^2} =$$

$$= \left(0{,}034 \frac{150}{0{,}0805} + 3 \cdot 1{,}2 + 9{,}5 + 6 \cdot 0{,}137\right) \frac{Q^2}{136{,}2 \cdot 0{,}259} = 1{,}55\, Q^2\ дм.$$

Шланг 4

$$z_4 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_{вс.\ клапан}\right) \frac{Q^2}{2g\omega_4^2}$$

$$= \left(0{,}075 \frac{20}{0{,}075} + 8{,}5\right) \frac{Q^2}{196{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 952} = 0{,}715^2\ дм$$

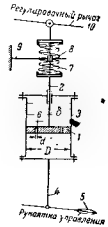
Результирующую характеристику находим обычным способом, а именно характеристику параллельно работающих трубопроводов 1 и 2 находим горизонтальным сложением и присоединяем к характеристике 1 + 2 вертикально характеристику 3 + 4 трубопроводов 3 и 4, работающих последовательно.

Согласно произведенному расчету

$$Q_1 = 5{,}2\ л\ сек, \qquad Q_2 = 4{,}8\ л\ сек;$$
$$Q_3 = 4{,}5\ л\ сек, \qquad Q_4 = 4{,}3\ л\ сек,$$
$$Q_5 = 4\ л\ сек, \qquad Q_6 = 3{,}6\ л\ сек,$$

$$t = \frac{2 \cdot 50\,380}{5}\left(\frac{1}{10{,}02} + \frac{1}{9{,}3} + \frac{1}{8{,}8} + \frac{1}{8{,}3} + \frac{1}{7{,}6}\right) = 12\,300\ сек$$

Задача 21 2 Гидравлический регулятор. Гидравлический регулятор (фиг 21 7) основной деталью имеет поршень 1 со штоком 2, который может перемещаться в камере, образованной стаканом 3. Стакан 3 через шток 4 связан с рукояткой управления 5. Камера стакана заполнена жидкостью, которая при перемещении поршня относительно стакана 3 может перетекать через отверстия 6 в поршне из одной стороны камеры в другую Шток поршня находится под воздействием двух пружин 7 и 8, каждая из которых упирается в стойку корпуса 9. В нормальном положении силы, создаваемые пружинами, уравновешиваются С поршневым штоком связан регулировочный рычаг 10. При включении регулятора рукоятка управления переводится в рабочее положение вниз При этом перемещается и стакан, а вместе с ним и поршень со штоком 2, так как находящаяся над поршнем жидкость не успевает перетечь через отверстия в поршне. Перемещение штока 2 на x еще больше сожмет пружину 8 и, наоборот, удлинит пружину 7. В результате этого появится неуравновешенная сила $P = 2\ сх$, которая будет стремиться переместить поршень и возвратить регулировочный рычаг в нормальное положение (вверх) В формуле для P с [$кГ/см$] — коэффициент жесткости пружины, x [$см$] — дополнительное сжатие одной и удлинение другой пружины, вызванное перемещением штока. Дополнительное сжатие и удлинение пружины колеблются в пределах от $x = l$ до $x = 0$.



Фиг. 21-7 Гидравлический регулятор

Требуется определить, пренебрегая инерционным влиянием движущихся частей и трением в приборе, время возвращения регулировочного рычага в нормальное положение при следующих данных. Диаметр штока поршня $\delta = 10$ *мм*; диаметр поршня $D = 100$ *мм*; диаметр отверстий в поршне $d = 2$ *мм*; число отверстий $k = 2$; коэффициент жесткости пружины $c = 1{,}5$ *кГ/см*, дополнительное сжатие пружины (перемещение поршневого штока) $l = 7$ *см*, объемный вес масла в камере $\gamma = 900$ *кГ/м*³ Кинематический коэффициент вязкости $\nu = 1$ *см*²/*сек*.

Решение При возвращении поршневого штока на место (вверх) ему будет противодействовать давление жидкости на поршень v, определяемое по формуле (весом жидкости и движущихся частей пренебрегаем)

$$p = \frac{P}{0{,}785(D^2 - d^2)} = \frac{2cx}{0{,}785(D^2 - d^2)}.$$

Минимальное значение $v = 0$ (при $x = 0$) Максимальное значение $p_{макс}$ будет при $x = l$.

$$p_{макс} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 7}{0{,}785(100 - 2 \cdot 0{,}04)} = 0{,}27\ кГ\ см^2.$$

Под этим переменным давлением жидкость будет перетекать через отверстия в поршне, предоставляя возможность поршню вместе со штоком возвращаться в нормальное положение.

Переменный расход перетекающей жидкости Q [л/сек] может быть найден по формуле

$$Q = \kappa\mu\omega\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}.$$

Но величину того же расхода Q можно определить из условий перемещения поршня, который движется со скоростью $v = \frac{dx}{dt}$, а именно

$$Q = 0{,}785(D^2 - d^2)v = \frac{dx}{dt} \cdot 0{,}785(D^2 - d^2)$$

Приравнивая расходы и разделяя переменные в полученном дифференциальном уравнении, будем иметь:

$$dt = \frac{0{,}785(D^2 - d^2)\,dx}{0{,}785\,d^2\kappa\mu\sqrt{2g\frac{2cx}{0{,}785(D^2 - d^2)}}}.$$

Интегрируя в пределах от $x = 0$ до $x = l$ [см], найдем

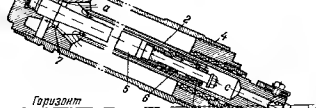
$$t = \frac{(D^2 - d^2)\,2\sqrt{l}}{\kappa\mu d^2\sqrt{2g\frac{2c}{0{,}785(D^2 - d^2)}}} = \frac{2(D^2 - d^2)\,l}{\kappa\mu d^2\sqrt{2g\frac{p_{макс}}{\gamma}}}$$

Коэффициент расхода μ принимаем равным $\mu = 0{,}65$, что соответствует простому отверстию в числу $Re_m = 100$, вычисленному по скорости истечения при давлении, равном половине максимального (фиг. 20-5):

$$t = \frac{2(100 - 1) \cdot 0{,}07}{2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}04\sqrt{19{,}62 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}27}{9{,}81}}} = 34{,}7\ сек.$$

Задача 21-3. Гидравлический тормоз отката. Основной деталью гидравлического тормоза отката (фиг 21 8) является поршень *1* с полым штоком *2*, соединенным с казенником *3*, перемещающимся с ним при откате после выстрела в неподвижном цилиндре *4* В полости штока находится так называемое неподвижное веретено *5* с модератором *6*. Конический шток веретена имеет переменное сечение. Веретено проходит через диск поршня и образует с последним кольцевое отверстие *7*, площадь которого зависит

от положения поршня. Модератор имеет клапан *8*. К началу отката все полости тормоза полностью заполнены маслом. При откате после выстрела перемещающийся вправо поршень создает в жидкости в полости *а* давление и жидкость из полости *а* пробрызгивается через отверстие *7* в полость *б* Часть жидкости через клапан *8* модератора пробрызгивается и в полость *с* поршневого штока. В дальнейшем модератор осуществляет гидравлическое торможение при возвращении откатных частей в нормаль



Фиг 21 8. Гидравлический тормоз отката.

ное положение. При этом жидкость из полости *с* через бороздки, имеющиеся в штоке *2*, пробрызгивается в полость штока Устройство накатника здесь не указано.

Требуется рассчитать необходимую переменную площадь $\omega_к$ кольцевой щели *7*, при которой поршень вместе с казенником будет перемещаться под действием постоянной силы R (это может иметь место после прекращения действия пороховых газов)

Решение Для решения задачи рассмотрим промежуточное положение поршня, в котором скорость его равняется v. Обозначим через G вес всех движущихся частей, связанных с поршнем (поршень, казенник, ствол орудия и т. д.) Применим теорему кинетической энергии. Так как в конце отката скорость движущихся частей равна нулю, то

$$\frac{G}{g}v^2 = 2R(s - x),$$

откуда

$$t^2 = 2\frac{R(s - x)g}{G},$$

где

s — полный ход поршня,

x — перемещение поршня от начала отката;

$s - x$ — оставшийся ход поршня;

$R(s - x)$ — работа, производимая постоянной силой на оставшемся ходе поршня,

$R = \delta p\Omega_0 + T - G\sin\theta$ — сила сопротивления перемещению поршня;

δp — разность давлений по обе стороны поршня;

Ω_0 — рабочая площадь поршня (площадь поршня $\Omega_п$ без площади отверстия в поршне),

T — сила трения;

θ — угол наклона тормоза.

Давлением жидкости в полости c пренебрегаем. Также пренебрегаем силами сопротивления, которые возникают в накатном устройстве, перемещающемся в период отката. Таким образом, задачу решается с некоторыми упрощениями, которые, однако, не искажают ее основной гидравлический смысл. Переменный расход жидкости через щель переменного сечения ω определим по формуле истечения жидкости через отверстие и из условия неразрывности

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g\frac{\delta p}{\gamma}}, \quad \Omega v;$$

здесь μ — коэффициент расхода;

$$\Omega = \Omega_n - \Omega_в - \omega = \Omega_0,$$

где $\Omega_в$ — переменная площадь сечения веретена в плоскости щеля.

Из последнего равенства имеем:

$$\frac{\delta p}{\gamma} = \frac{\Omega^2 v^2}{\mu^2\omega^2 2g} = \frac{R(s-x)\Omega^2}{G\mu^2\omega^2},$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\gamma(\delta p\Omega_0 + T - G\sin\theta)(s-x)\Omega^2}{G\mu^2\delta p},$$

или

$$\omega^2 = \frac{\gamma\left(\Omega_0 + \frac{T - G\sin\theta}{\delta p}\right)(s-x)\Omega^2}{G\mu^2}.$$

Если можно пренебречь значением $\frac{T - G\sin\theta}{\delta p}$, то

$$\omega^2 = \frac{\gamma(s-x)\Omega_0\Omega^2}{\mu^2 G}.$$

В том случае, если бы расчет гидравлического тормоза нужно было произвести для отверстия кольцевой щели, не меняющейся по ходу орудия, что имело бы место, если бы диаметр веретена имел постоянный размер, то силы, действующие на поршень, при откате имели бы переменное значение. В этом случае определяется зависимость между перемещением штока, его скоростью и начальными данными. Исходным уравнением поправкому является теорема о кинетической энергии, но в дифференциальной форме

$$\frac{G}{g}d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -(\delta p\Omega_0 + T - G\sin\theta)\,dx$$

После преобразований, аналогичных предыдущему случаю, получим

$$\frac{d}{dx}(v^2) + \frac{\gamma\Omega_0\Omega^2 v^2}{G\mu^2\omega^2} = -\frac{2g(T - G\sin\theta)}{G},$$

обозначив

$$b = \frac{\gamma\Omega_0\Omega^2}{G\mu^2\omega^2} \text{ и } c = -\frac{2g(T - G\sin\theta)}{G},$$

будем иметь

$$(v^2)' + bv^2 = c.$$

Последнее выражение представляет собой линейное дифференциальное уравнение с правой частью. Общий интеграл этого уравнения ищем в виде:

$$v^2 = Ae^{-bx} + D$$

Постоянные интегрирования находим по начальным данным, а именно: дифференцируя этот интеграл по x, получим:

$$(v^2)' = -Abe^{-bx};$$

подставляя в дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$-Abe^{-bx} + Abe^{-bx} + Db = c,$$

откуда

$$D = \frac{c}{b},$$

а при $x = 0$, $v = v_0$

$$v_0^2 = A + D, \text{ или } A = v_0^2 - \frac{c}{b}.$$

Таким образом, после преобразований

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{c}{b}\right)e^{-bx} + \frac{c}{b}.$$

Последнее выражение можно представить в виде:

$$e^{+bx} = \frac{v_0^2 - \frac{c}{b}}{v^2 - \frac{c}{b}},$$

откуда

$$x = \frac{1}{b}\ln\frac{v_0^2 - \frac{c}{b}}{v^2 - \frac{c}{b}},$$

или

$$x = \frac{\mu^2\omega^2 G}{\gamma\Omega_0\Omega^2}\ln\frac{v_0^2 + \frac{2g(T - G\sin\theta)G\mu^2\omega^2}{G\gamma\Omega_0\Omega^2}}{v^2 + \frac{2g(T - G\sin\theta)\mu^2\omega^2}{\gamma\Omega_0\Omega^2}}.$$

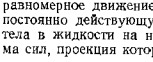
Глава двадцать вторая

СОПРОТИВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕМУСЯ В НЕЙ ТЕЛУ

22-1. Силы, действующие на тело, движущееся в жидкости

Силы, действующие на движущееся тело со стороны жидкости, могут быть разбиты на два класса: на силы трения dT, направленные по касательной к поверхности тела, и на силы давления dP, перпендикулярные к соответствующим элементам поверхности тела (фиг. 22-1). Оба класса сил представляют в об-

щем случае сложную систему сил, главный вектор которых в качестве одной составляющей дает силу сопротивления, направленную против направления движения тела, а в качестве другой составляющей в общем случае — подъемную силу, направленную перпендикулярно силе сопротивления. Существование той и другой составляющей подтверждается повседневным опытом. Так, например, для того чтобы поддерживать в покоящейся жидкости равномерное движение тела, к нему надо приложить некоторую постоянно действующую силу. Это значит, что при движении тела в жидкости на него со стороны жидкости действует система сил, проекция которых на направление движения дает составляющую, противоположную движению, — силу сопротивления. Благодаря этому для поддержания равномерного движения необходимо затрачивать определенное количество механической энергии для преодоления сопротивления. Затрачиваемая механическая энергия передается жидкости и в конечном счете необратимым процессом преобразуется в ее тепловую энергию.



Фиг. 22-1. Схема сил, действующих на элементарную поверхность обтекаемого тела.

Полет самолета подтверждает, что, кроме сил сопротивления, система действующих сил дает составляющую - подъемную силу.

Аналогичные явления наблюдаются и в том случае, когда тело неподвижно, а жидкость обтекает его. В этом случае тело оказывает сопротивление потоку жидкости, на что затрачивается энергия жидкости.

Здесь будут рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к силам сопротивления. Исследования показывают, что на величину силы сопротивления оказывают влияние: род жидкости, форма движущегося тела, его положение в жидкости и характер его движения. Тело может двигаться в полностью погруженном состоянии (подводное плавание) или частично погруженном.

В связи с различными закономерностями, которым подчиняются возмущения в жидкости, обусловливающие сопротивления, принято полное сопротивление разлагать на три вида: сопротивление трения, сопротивление давления и волновое сопротивление.

22-2. Сопротивление трения

Сопротивлением трения F_m называется проекция на направление движения главного вектора сил трения, возникающих на поверхности тела при обтекании его жидкостью. Величина сил трения обусловливается характером движения жидкости в слое, ближайшем к поверхности. Этот слой жидкости, находящейся благодаря вязкости в состоянии вихревого движения, называется пограничным слоем и в дальнейшем будет рассмотрен подробнее.

Пока лишь отметим, что движение жидкости в пограничном слое может быть или только ламинарным, или только турбулентным, но может быть также в одной части ламинарным, а в другой турбулентным.

Функциональная зависимость для силы сопротивления трения может быть представлена в виде:

$$F_m = f(\mu, \Delta, l, v, \omega, \rho, \text{ формы}),$$

или

$$F_m = \rho v^2 \omega f\left(Re, \frac{\Delta}{l}, \text{ формы}\right). \qquad (22\text{-}1)$$

или

$$F_m = C_m \rho \frac{v^2}{2} \cdot \omega, \qquad (22\text{-}2)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости,
Δ — шероховатость поверхности;
v — скорость тела;
ω — характерная площадь;
l — характерная длина;
C_m — коэффициент сопротивления трения·

$$C_m = 2f\left(Re, \frac{\Delta}{l}, \text{ формы}\right). \qquad (22\text{-}3)$$

Вычисляется коэффициент C_m по различным эмпирическим или полуэмпирическим формулам.

22-3. Сопротивление давления

Сопротивлением давления $F_д$ называется проекция на направление движения главного вектора сил давления, действующих на тело со стороны жидкости. Сначала рассмотрим сопротивление давления при условии полного погружения тела в жидкость, исключающего образование волн. Этот вид сопротивления иногда называют кильватерным[1] сопротивлением. Энергия, затрачиваемая на преодоление кильватерного сопротивления, частично преобразуется сначала в кинетическую энергию кильватерных вихрей, а затем необратимым процессом в тепловую. Так же как и сопротивление трения, кильватерное сопротивление обусловливается влиянием вязкости жидкости.

Сила $F_д$ вычисляется по формуле

$$F_д = C_д \rho \frac{v^2}{2} \omega, \qquad (22\text{-}4)$$

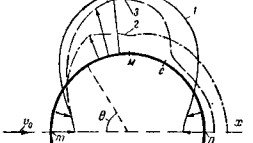
[1] Кильватер — след, остающийся на воде позади идущего судна.

где $C_д$ — коэффициент сопротивления давления, зависящий от числа Re и формы поверхности тела:

$$C_д = f(Re, \text{ формы}). \qquad (22\text{-}5)$$

Сопротивление давления тела, полностью погруженного в жидкость, опытным путем можно определить следующим образом.

На поверхности тела просверливают отверстия и присоединяют к ним пьезометры, которыми измеряют давления, действующие на соответствующие элементы поверхности. Проекция главного вектора сил давления и дает величину сопротивления давления.



Фиг 22-2 Распределение давления по поверхности цилиндра.

1 при обтекании потенциальным потоком 2—при обтекании реальной жидкостью при $Re = 186\,000$. 3 при обтекании реальной жидкостью при $Re = 670\,000$.

Для более ясного представления о явлениях, возникающих при обтекании тела и обусловливающих возникновение сопротивления давления, рассмотрим сначала обтекание бесконечно длинного цилиндра потенциальным потоком (фиг. 22 2), имеющим на значительных расстояниях от цилиндра (в области невозмущенного потока в бесконечности) скорость v_0 и давление p_0.

Этому потоку удовлетворяет функция тока

$$\psi = v_0 y - v_0 a^2 \frac{y}{r^2}, \qquad (22\text{-}6)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, x и y — координаты его пространства, и a — радиус цилиндра.

Функции тока $\psi = 0$ удовлетворяют точки

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = a^2$$

Из этого следует, что частица, движущаяся вдоль оси x, встречает цилиндр в точке m, затем поток разделяется и обтекает цилиндр с обеих сторон. Слияние потока происходит в точке n, а частица дальше продолжает свое движение, оставаясь на оси x.

Определим скорость движения частиц:

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_0 - v_0 a^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad (22\text{-}7)$$

$$u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2v_0 a^2 \frac{xy}{r^4}. \qquad (22\text{-}8)$$

Исследуем это движение при $x = y = \pm\infty$.

$$u_x = v_0; \quad u_y = 0,$$

т. е. жидкость движется в бесконечности параллельно оси x со скоростью v_0.

Нулю равняется скорость частиц с координатами $y = 0$ и $x = \pm a$, т. е. в точках m и n.

По поверхности цилиндра скорости распределяются по формуле

$$u = \frac{u_y}{\cos\theta} = \frac{2v_0 xy}{a^2 \cos\theta} = 2v_0 \sin\theta \qquad (22\text{-}9)$$

Легко убедиться в том, что рассматриваемое течение является потенциальным, так как согласно формулам (7-15)

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0.$$

Таким образом, в исследуемом потенциальном потоке скорости частиц жидкости, расположенных на оси влево от цилиндра, по мере приближения их к цилиндру постепенно убывают и в точке m становятся равными нулю. Затем частицы движутся по окружности цилиндра с возрастающей скоростью и наибольшую скорость u_{max} приобретают в наиболее удаленной от оси точке. При дальнейшем движении по окружности цилиндра к оси скорость убывает до нуля, после чего частица продолжает путь по оси x с возрастающей до v_0 скоростью, которую она приобретает в бесконечности. На поверхности цилиндра скорости не равны нулю. Поэтому такое движение может иметь только идеальная жидкость.

Для исследования распределения давления по поверхности цилиндра воспользуемся уравнением Бернулли для потенциального потока (при $z_1 = z_2$) в виде:

$$p_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} = p + \rho\frac{u^2}{2}.$$

Подставляя вместо u^2 его значение, соответствующее $r = a$, т. е.

$$u = 2v_0 \sin\theta,$$

получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho\frac{v_0^2}{2}} = 1 - 4\sin^2\theta \qquad (22\text{-}10)$$

Изменение давления $p - p_0$ по окружности цилиндра в долях $\frac{\rho v_0^2}{2}$ для одной половины цилиндра показано линией *1* на фиг. 22-2, на которой вектор, направленные внутрь цилиндра, соответствуют давлениям $p > p_0$.

Из формулы (22-10) следует, что в потенциальном потоке давления по поверхности цилиндра распределяются симметрично относительно диаметрального сечения цилиндра, перпендикулярного к v_0. Поэтому главный вектор сил давления в потенциальном потоке равен нулю и нулю равно сопротивление давления. Минимальное давление имеет место в точках с $\theta = 90°$.

Фиг. 22 3. Схема распределения скоростей при обтекании цилиндра реальным потоком.

Важным является и другой факт. На задней стороне цилиндра (при $\theta > 90°$) жидкость движется замедленно и притом в область все повышающегося давления, что способствует в реальном потоке нарушению плавности обтекания, о чем будет сказано дальше.

В реальном потоке вблизи поверхности обтекаемого тела движение отличается от потенциального. На поверхности тела скорость жидкости равна нулю. В пограничном слое движение жидкости вихревое. При малых числах Re оно ламинарное. Вследствие того, что в кормовой части слоя жидкость движется в область повышающегося давления, отдельные ее частицы вблизи поверхности затормаживаются, останавливаются и даже приобретают возвратное движение (фиг. 22-3). Происходит частичный срыв ламинарного пограничного слоя, что ведет к резкому ухудшению условий обтекания. Благодаря срыву ламинарного слоя изменяется и распределение давления по поверхности обтекаемого тела. Совпадение значений давления на поверхности цилиндра в реальном и потенциальном потоке (фиг. 22 2) имеется лишь на передней стороне цилиндра и в пределах $2\theta = 30 \div 40°$. Точка M с минимальным давлением смещается несколько навстречу потоку ($\theta_M < 90°$). Точка C отрыва ламинарного пограничного слоя от поверхности всегда находится за точкой с минимальным давлением M ($\theta_C > \theta_M$). Частицы оторвавшегося пограничного слоя свертываются в вихри, образующиеся то с одной, то с другой стороны цилиндра (фиг. 22 4 –22 8).

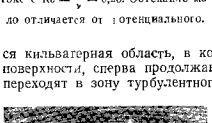
Эти вихри на некотором расстоянии от обтекаемого тела образуют так называемую вихревую дорожку, располагаясь на ней в том или другом порядке. На фиг 22-9 показано так называемое шахматное расположение вихрей

Вся вихревая система движется вслед за телом, причем с удалением тела вихри все больше и больше отстают от него, исчезая на некотором расстоянии. Непосредственно за телом создает-

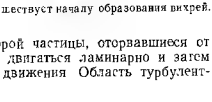
Фиг. 22-4. Обтекание цилиндра в потоке с $Re = \frac{v_0 D}{\nu} = 0{,}25$. Обтекание мало отличается от потенциального.

Фиг 22-5 Обтекание цилиндра в потоке с $Re = \frac{v_0 D}{\nu} = 1{,}5$. Обтекание предшествует началу образования вихрей.

ся кильватерная область, в которой частицы, оторвавшиеся от поверхности, сперва продолжают двигаться ламинарно и затем переходят в зону турбулентного движения Область турбулент-



Фиг 22 6. Обтекание цилиндра в потоке с $Re = \frac{v_0 D}{\nu} = 9$. Начало образования вихрей.



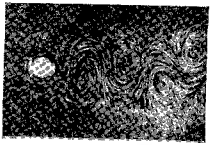
Фиг. 22-7. Обтекание цилиндра в потоке с $Re = \frac{v_0 D}{\nu} = 250$.

Вихри образуют вихревую дорожку Кармана. Фотокамера покоится относительно обтекаемого цилиндра.

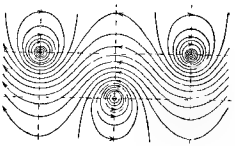
ности в начальной стадии располагается на некотором расстоянии от тела и только при значительных числах Re возникает у тела.

При этом происходит некоторое удлинение ламинарного пограничного слоя и возникновение второго участка пограничного

слоя, находящегося в состоянии турбулентного движения[1]. С этого момента пограничный слой по длине состоит из двух частей: ламинарной на передней части тела и турбулентной на задней. При этом точка перехода ламинарного слоя в турбулентный находится ближе к задней, чем находилась точка отрыва ламинарного слоя. Однако пограничный слой, продолжающий двигаться в области с повышающимся давлением, вследствие описанного выше торможения также отрывается от поверхности, но теперь уже отрывается его турбулентная часть, причем точка отрыва турбулентного слоя лежит ближе к задней



Фиг. 22.8. Обтекание цилиндра в потоке с $Re = \frac{vD}{\nu} = 250$. Вихри образуют дорожку Кармана. Фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости.



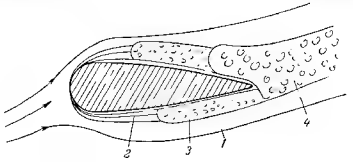
Фиг. 22.9. Линии тока в вихревой дорожке Кармана. Фотокамера покоится относительно невозмущенной жидкости.

части, чем раньше. Это улучшает условия обтекания, благодаря чему резко уменьшается (в 4—5 раз) коэффициент сопротивления. Это явление носит название кризиса обтекания или кризиса сопротивления. На фиг. 22-2 линии *2* и *3* показывают распределение давления по окружности цилиндра в реальном потоке. Линия *2* соответствует докризисному обтеканию при $Re = \frac{vD}{\nu} = 186\,000$. В этом случае срыв ламинарного слоя происходит при $\theta = 82°$. Линия *3* соответствует обтеканию после кризиса ($Re = 670\,000$), при котором срыв пограничного слоя происходит при $\theta = 120°$.

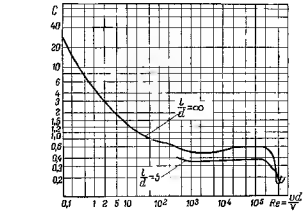
Для уменьшения сопротивления давления обтекаемому телу надо придать такую форму, при которой точка отрыва находилась бы как можно ближе к корме.

В связи с изложенным поток, обтекающий тело, в общем случае следует представлять в виде (фиг. 22-10):

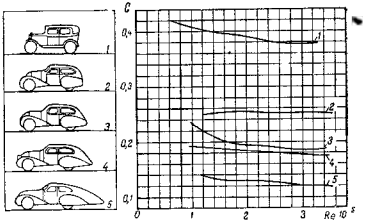
[1] Заметим, что турбулентная часть пограничного слоя имеет ламинарный подслой непосредственно у поверхности тела



Фиг. 22-10. Схема потока при обтекании тела.



Фиг. 22.11. Зависимость коэффициента сопротивления цилиндра от Re и l/d



Фиг. 22.12. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Re для различных форм автомобилей

Таблица 22-1

Значение коэффициента сопротивления для различных типов транспортных машин

Тип машины	Значение C
ГАЗ-А	0,464—0,48
М-1	0,304—0,32
Москвич	0,28 —0,296
ЗИС-110	0,224—0,240
М-20	0,184—0,2
Автобус с нормальным кузовом	0,32 —0,48
Автобус с обтекаемым кузовом	0,2 —0,24
Грузовой автомобиль	0,48 —0,56
Броневавтомобиль, бронетранспортер	0,4 —0,48
Паровозы (фиг. 22-13):	
А — исходная модель	1,0
Б — закрыты машины и колеса	0,95
С — надет обтекатель на торцевую часть	0,7
D — надет обтекатель на верх	0,64
Е — закрыт воздушный промежуток между паровозом и тендером	0,61
F — устроен „зализ" перед фронтом кабины машиниста	0,57

Таблица 22-2

Формулы для определения коэффициента C в формуле для определения силы, с которой воздействует на клапан протекающая жидкость в области квадратичного режима (по Баху)

Тип клапана	C
Тарельчатый без нижнего направления (фиг. 15-33)	$2{,}5+19\,\dfrac{b-0{,}1d}{d}+\left(\dfrac{d}{2{,}45h}\right)^2$
Тарельчатый с нижним направлением (фиг. 15-34)	$2{,}25+17{,}1\,\dfrac{b-0{,}1d}{d}+\left[\dfrac{\omega}{0{,}54\cdot(d+s)h}\right]^2$
Конусный с плоской нижней поверхностью (фиг. 15-35)	$1{,}05+\left(\dfrac{d}{3{,}56h}\right)^2$
Конусный с конусообразной опорной поверхностью (фиг. 15-36)	$0{,}38+\left(\dfrac{d}{2{,}72h}\right)^2$
Шаровой с конусной опорной поверхностью (фиг. 15-37)	$0{,}96+\left(\dfrac{d}{4{,}6h}\right)^2$

1 — потенциального потока вне пограничного слоя и кильватерного течения,

2 — пограничного ламинарного слоя в области носовой части тела,

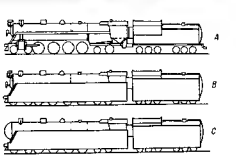
3 — пограничного турбулентного слоя с ламинарным подслоем в области кормы,

4 — кильватерного потока.

О существенном влиянии на коэффициент C формы обтекаемого тела и характера потока можно судить по графикам на фиг. 22-11, 22-12.

Заметим, что для шара с диаметром d, обтекаемого ламинарным потоком при $Re=\dfrac{d}{\nu}<2$,

$$C=\frac{24}{Re}. \qquad (22\text{-}11)$$



Фиг. 22-13. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Re для различных форм паровозов

В табл. 22-1 приведены значения C для различных типов транспортных машин[1], а в табл. 22-2 — значения C для клапанов, показанных на фиг. 15-33—15-37.

22-4. Волновое сопротивление

При движении тела в частично погруженном состоянии в общем случае возникают две системы волн: система расходящихся волн с центральным углом около 40° и система поперечных волн. В нешироком канале возникают только поперечные волны, сопровождающие движущееся тело. Энергия, затрачиваемая на образование волн, представляет волновое сопротивление. Сила сопротивления, соответствующая только волновому сопротивлению, равна части общего сопротивления давления, возникающего при движении тела на поверхности. Особенностью волнового сопротивления, что заставляет его рассматривать отдельно, является зависимость его уже не от вязкости (т. е. не от числа Re), а главным образом от силы тяжести (от числа Fr) и практически в несущественной степени — от поверхностного натяжения

[1] Г. В. Зимелев, Теория автомобиля, Машгиз, 1950, Г. Н. Абрамович, К расчету воздушного сопротивления поезда на открытой трассе и в тоннеле, Труды ЦАГИ, вып. 400, 1938

Сила, соответствующая волновому сопротивлению, определяется по формуле

$$F_в = C_в \rho \frac{v^2}{2} \omega, \qquad (22\text{-}12)$$

где

$$C_в = f(Fr, \psi, \theta) \qquad (22\text{-}13)$$

называется коэффициентом волнового сопротивления; здесь $\psi = \frac{l}{\sqrt[3]{W}}$ — коэффициент заострения;

l — длина плавающего тела,

W — водоизмещение;

θ — угол, определяющий положение тела относительно поверхности жидкости.

Часто силу волнового сопротивления определяют по формуле

$$F_в = K_в \gamma W, \qquad (22\text{-}14)$$

где

$$K_в = f(Fr, \psi, \theta) \qquad (22\text{-}15)$$

Сопоставляя формулу (22-14) с формулой (22-11), получим

$$C_в = \frac{2K_в W}{\omega_0 Fr}. \qquad (22\text{-}16)$$

Обычно волновое сопротивление определяют экспериментально.

Задача 22-1. В канале испытывается модель плавающего тела, исполненная в масштабе 1,5 натуральной величины. Необходимо определить, при какой скорости должна испытываться модель, чтобы движение модели было подобно движению тела, плавающего со скоростью 10 *км/час*.

Решение. Для подобия потоков, создаваемых движущимся телом и моделью, необходимо равенство чисел Фруда

$$Fr = \frac{v_н^2}{g_н l_н} = \frac{v_м^2}{g_м l_м}.$$

Так как отношение линейных размеров тела и модели равно $\frac{l_н}{l_м} = \lambda = 5$ и $g_н = g_м$, то скорость испытания модели должна быть равной

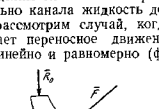
$$v_м = v_н \sqrt{\frac{l_м}{l_н}} = 10 \sqrt{\frac{1}{5}} = 4{,}47 \text{ км/час}$$

Глава двадцать третья

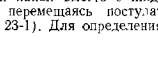
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

23-1. Сила взаимодействия жидкости с поверхностью, движущейся равномерно, поступательно и прямолинейно

Определим главный вектор сил, с которыми движущаяся относительно канала жидкость действует на его стенки. Для общности рассмотрим случай, когда и канал вместе с жидкостью совершает переносное движение, перемещаясь поступательно, прямолинейно и равномерно (фиг. 23-1). Для определения главного вектора применим теорему об изменении количества движения для частиц жидкости, находящихся в канале. В векторной форме применительно к рассматриваемому случаю указанная теорема формулируется следующим образом: производная по времени от вектора q — количества движения системы материальных точек, заполняющих полость канала, равняется главному вектору R всех внешних массовых и поверхностных сил, действующих на эту систему, т. е.



Фиг. 23-1. Схема сил при взаимодействии потока с движущимся телом



Фиг. 23-2. Схема струи, взаимодействующей с движущимся телом

$$\frac{dq}{dt} = R_{масс} + R_{пов}. \qquad (23\text{-}1)$$

Вектор массовых сил равен весу рассматриваемого объема жидкости. Вектор внешних поверхностных сил в общем случае равен геометрической сумме вектора сил реакции стенок канала $R_{ст}$ и векторов сил R_0 и R_1, с которыми жидкость, находящаяся вне рассматриваемого канала, действует на жидкость, находящуюся в канале. Таким образом,

$$R_{пов} = \bar{R}_{ст} + \bar{R}_0 + \bar{R}_1 \qquad (23\text{-}2)$$

Для вычисления производной от количества движения сначала найдем приращение количества движения рассматриваемой системы за время dt, в течение которого жидкость переместится в переносном движении вместе с каналом и, кроме того, в относительном движении относительно канала и займет объем, ограниченный сечениями, показанными на фиг. 23-2 пунктиром.

Приращение количества движения системы найдем как разность ее количеств движения в перемещенном и начальном положениях.

Вследствие того, что канал движется поступательно, это приращение можно найти как разность количеств движения массы в объемах 0, a и 1.

Обозначим вектор количества движения массы жидкости в объемах 0, a и 1 соответственно через q_0, q_a и q_1.

Тогда, очевидно, количество движения рассматриваемой системы в переменном положении будет равно геометрической сумме $q_a + q_1$; количество движения системы в начальном положении будет равно $q_0 + q_a$, причем количество движения в объеме $a - q_a$ (поскольку движение жидкости установившееся, а канала поступательное, прямолинейное и равномерное) в обоих случаях одно и то же.

Таким образом, за время dt приращение количества движения будет равно только разности

$$dq = q_1 - q_0.$$

Вычислим q_1 и q_0.

Ввиду того что канал движется поступательно, прямолинейно и равномерно, разность количеств движения $q_1 - q_0$ можно рассматривать как разность, соответствующую количествам движения только в относительном движении. Поэтому каждое из количеств движения q_1 и q_0 можно найти по формулам, аналогичным формуле (10-15), в которой вместо абсолютной скорости v будет фигурировать относительная скорость $\bar{w}$. Будем иметь:

$$d\bar{q} = (\beta_1 \rho Q \bar{w}_1 - \beta_0 \rho Q \bar{w}_0)\, dt,$$

откуда

$$\frac{dq}{dt} = (\beta_1 \rho Q \bar{w}_1 - \beta_0 \rho Q \bar{w}_0). \qquad (23\text{-}3)$$

При равенстве коэффициентов $\beta_1 = \beta_0 = \beta$ в формуле (23-3) относительные скорости w могут быть заменены абсолютными скоростями v.

В этом случае формула может быть представлена в виде

$$\frac{dq}{dt} = \beta \rho Q v_1 - \beta \rho Q v_0. \qquad (23\text{-}4)$$

Подставляя значение $\frac{dq}{dt}$ в формулу (23-1), получим

$$\beta_1 \rho Q \bar{w}_1 - \beta_0 \rho Q w_0 = R_{мас} + R_{см} + R_0 + \bar{R}_1. \qquad (23\text{-}5)$$

Главный вектор сил действия потока на стенки F равен, но противоположен вектору $R_{см}$,

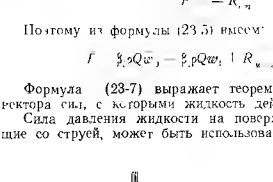
$$F = -R_{см}. \qquad (23\text{-}6)$$

Поэтому из формулы (23-5) имеем:

$$F = \beta_1 \rho Q \bar{w}_1 - \beta_0 \rho Q w_0 + R_{мас} + R_0 + \bar{R}_1. \qquad (23\text{-}7)$$

Формула (23-7) выражает теорему Эйлера для главного вектора сил, с которыми жидкость действует на поверхность.

Сила давления жидкости на поверхности, взаимодействующие со струей, может быть использована для приведения этой



Фиг. 23-3. Схема струи, натекающей на плоскую поверхность.

Фиг. 23-4. Схема потока, протекающего по криволинейному каналу.

поверхности в движение, что находит широкое применение в так называемых реактивных движителях. Выдающийся вклад в развитие теории реактивных движителей внесли К. Э. Циолковский и Н. Е. Жуковский[1].

Свободную струю, растекающуюся по поверхности во все стороны (как это имеет место при натекании ее, например, на плоскую поверхность (фиг. 23-3)), надо представить хотя и сплошной, но состоящей из элементарных струек со скоростями w_0, равными по величине w_0, и с расходом dQ. В этом случае уравнение Эйлера надо записать в виде

$$F = \beta_1 \rho Q \bar{w}_0 - \Sigma \beta \rho Q w_1. \qquad (23\text{-}8)$$

[1] Н. Е. Жуковский, О реакции вытекающей и втекающей струй. Журн. Русск. физ.-хим. общ., ч. физ., 1882, т. XIV, Матем. сборн., 1886, т. XII.

Силы R_0 и R_1 можно не учитывать, так как свободная струя испытывает одинаковое воздействие окружающей среды, а влиянием веса обычно пренебрегают.

В следующих параграфах будут рассмотрены некоторые частные случаи.

23-2. Сила действия потока жидкости на неподвижное колено, образующее угол 90°

Рассмотрим действия напорного потока на неподвижное колено (фиг. 23-4). Определим горизонтальную и вертикальную проекции главного вектора. Воспользуемся формулой (23-7), в которой относительные скорости надо заменить на абсолютные. Применительно к осям координат, показанным на фигуре, получим:

$$F_x = \beta_1 \rho Q v_1 + p_1 \omega_1, \tag{23-9}$$

где p_1 и ω_1 — давление и площадь живого сечения потока на выходе;

$$F_y = \beta_0 \rho Q v_0 + G + p_0 \omega_0, \tag{23-10}$$

где G — вес жидкости в колене;
p_0 и ω_0 — давление и площадь сечения потока на входе.

Главный вектор будет равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \tag{23-11}$$

23-3. Сила действия свободной струи на неподвижную плоскую поверхность

Рассмотрим действие свободной компактной струи на неподвижную плоскую поверхность, расположенную перпендикулярно к ее оси (фиг. 23-5). При натекании на нее струя изменяет свое направление и в дальнейшем растекается по поверхности. Если поверхность горизонтальна и неограниченна, то растекание происходит симметрично относительно оси струи, причем в пределах некоторого кольца струя растекается весьма тонким слоем. Пренебрегая силами трения в пределах этого кольца, можно считать, что скорость растекания равна начальной скорости v_0. За внешней границей кольца происходит резкое увеличение толщины растекающегося слоя.

Аналогичную картину растекания можно представить и для вертикальной плоской поверхности, если пренебречь влиянием веса жидкости.

При симметричном растекании сила F, как следует из формулы (23-8), будет перпендикулярна к плоской поверхности,

в этом случае ее можно рассматривать как силу давления струи P на поверхность. Назовем ее значение теоретическим P_m.

Спроектируем уравнение (23-8) на направление струи. Так как любой член выражения $\Sigma \rho d Q v_0$ перпендикулярен оси проекций, то их проекции будут равны нулю, и для силы P_m получим выражение

$$P_m = \beta_0 \rho Q v_0. \tag{23-12}$$

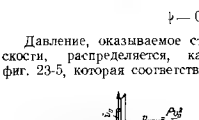
Действительное значение силы будет несколько меньше

$$P = \psi \beta_0 \rho Q v_0. \tag{23-13}$$

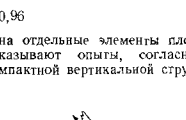
На основании экспериментальных исследований[1] этот коэффициент (при $\beta_0 = 1$) и при диаметрах кольца растекания больше трех диаметров струи оказывается равным

$$\psi = 0{,}92 \div 0{,}96$$

Давление, оказываемое струей на отдельные элементы плоскости, распределяется, как показывают опыты, согласно фиг. 23-5, которая соответствует компактной вертикальной струе



Фиг. 23-5. Схема распределения давления струи при натекании на плоскую неподвижную поверхность.



Фиг. 23-6. Схема растекания струи при натекании на плоскую поверхность под углом

диаметром 49,6 *мм* при напоре 68,7 *см*. Максимальное давление испытывает точка плоскости, совпадающая с осью струи. В этой точке давление достигает значения

$$p = \rho \frac{v_0^2}{2} \kappa \Gamma / ч^2,$$

по мере удаления жидкости от оси давление резко уменьшается.

Увеличение давления в направлении к оси струи обусловливается, как это следует из формулы (8-29), кривизной траекто-

[1] А. Гибсон, Гидравлика и ее приложения, ОНТИ, 1934

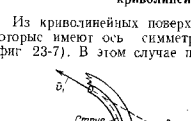
рии частиц. На этот факт обращалось внимание уже неоднократно.

Если ось струи образует с плоской поверхностью острый угол (фиг. 23-6), для силы P_m получим следующее выражение:

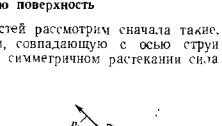
$$P_m = \beta\rho Q v_0 \sin\theta \qquad (23\text{-}14)$$

23-4. Сила действия свободной струи на неподвижную криволинейную поверхность

Из криволинейных поверхностей рассмотрим сначала такие, которые имеют ось симметрии, совпадающую с осью струи (фиг. 23-7). В этом случае при симметричном растекании сила



Фиг. 23-7. Схема растекания струи при натекании на криволинейную симметричную поверхность.



Фиг. 23-8. Схема растекания струи при натекании на криволинейную несимметричную поверхность.

F будет направлена по оси струи. Для ее определения воспользуемся формулой (23-8), спроектировав ее на ось симметрии. Принимая скорость растекания $v = v_0$, получим.

$$F = \beta_0\rho Q v_0 + \rho Q v_0 \cos\theta,$$

или

$$F = \rho Q v_0(\beta_0 + \cos\theta) \qquad (23\text{-}15)$$

Максимальное значение будем иметь при $\theta = 0$

$$F_{макс} = \rho Q v_0(\beta_0 + 1). \qquad (23\text{-}16)$$

Экспериментальная проверка формулы (23-16) показывает, что для полусферической поверхности (при $\beta_0 = 1$) действительное значение $F_{макс\ действ} = 0{,}94F_{макс}$ при $\frac{\omega}{\Omega} = 4$ (где Ω — площадь большого круга сферы).

Если криволинейная поверхность произвольной формы, действие жидкости определится двумя скрещивающимися силами, приводящимися к динамическому винту. В случае плоского

потока (фиг. 23-8) силы действия могут быть приведены к равнодействующей силе. Найдем ее проекции. Воспользуемся формулой (23-7), представив ее в виде (при $\beta_0 = \beta = 1$):

$$\rho Q v_0 - \rho Q v_1 = F_x + F_y.$$

Проектируя это уравнение на направление F_x и F_y и принимая $v_1 = v_0$, получим:

$$F_x = \rho Q v_0(1 + \cos\theta), \qquad (23\text{-}17)$$

$$F_y = \rho Q v_0 \sin\theta, \qquad (23\text{-}18)$$

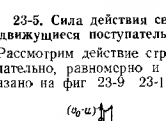
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2\rho Q v_0 \cos\frac{\theta}{2}, \qquad (23\text{-}19)$$

а угол φ определяется выражением

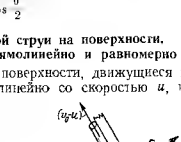
$$\cos\varphi = \frac{1 + \cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

23-5. Сила действия свободной струи на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно

Рассмотрим действие струи на поверхности, движущиеся поступательно, равномерно и прямолинейно со скоростью u, как показано на фиг. 23-9—23-11.



Фиг. 23-9. Схема растекания струи при натекании на плоскую поверхность, движущуюся поступательно.



Фиг. 23-10. Схема растекания струи при натекании под углом на плоскую поверхность, движущуюся поступательно.

В этих случаях растекание струи происходит, как и раньше. Например, на плоские поверхности струя натекает с относительной скоростью $w = v_0 - u$. Пренебрегая трением и весом, можно считать, что с этой же относительной скоростью струя растекается по поверхности.

На криволинейную поверхность (фиг. 23-11) струя натекает с относительной скоростью:

$$w = \sqrt{v_0^2 + u^2 - 2v_0 u\cos\theta} \qquad (23\text{-}20)$$

Обычно принимается, что с этой скоростью струя движется по поверхности. В реальных условиях относительная скорость уменьшается, и после схода с поверхности она меньше, чем при входе.

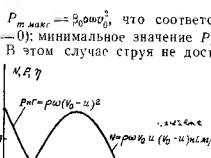
Рассуждения, аналогичные предыдущим, позволяют получить для рассматриваемых случаев следующие выражения для сил

Для случая по фиг. 23-9

$$P_m = \beta_0 \rho Q w. \qquad (23\text{-}21)$$

Максимальное значение $P_{m\,макс} = \beta_0 \rho \omega v_0^2$, что соответствует неподвижной плоскости ($u = 0$); минимальное значение $P_m = 0$, что соответствует $u = v_0$. В этом случае струя не достигает

Фиг. 23-11. Схема растекания струи при натекании на криволинейную поверхность, движущуюся поступательно



Фиг. 23-12. Зависимость силы давления, мощности и к. п. д. струи от отношения u/v_0

плоскости, которая движется с одинаковой с ней скоростью. Зависимость P_m от u показана на фиг. 23-12. За единицу P_m принято ее максимальное значение.

Для случая по фиг 23-10

$$P_m = \beta_0 \rho Q w \sin\theta \qquad (23\text{-}22)$$

Как и в предыдущем случае, $P_{m\,макс}$ соответствует неподвижной плоскости, а $P_{m\,мин} = 0$ при $u = v_0$.

Для случая по фиг. 23-11

$$F_x = \rho Q\,[\beta_0 w_0 \cos(\theta_0 + \vartheta_0) - \beta_1 w_1 \cos(\theta_1 + \vartheta_1)]; \qquad (23\text{-}23)$$

$$F_y = \rho Q\,[\beta_0 w_0 \sin(\theta_0 + \vartheta_0) - \beta_1 w_1 \sin(\theta_1 + \vartheta_1)], \qquad (23\text{-}24)$$

где ось x совпадает с направлением u, а ось y ей перпендикулярна.

23-6. Мощность струи, действующей на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно

Индикаторной мощностью струи, действующей на движущиеся поверхности, назовем секундную работу, совершаемую силами F, с которыми струя действует на поверхность.

Фиг. 23-13. Схема колеса, вращающегося под действием силы давления струи

Для того чтобы эти силы могли совершать работу, необходимо, чтобы поверхности, на которые струя действует, могли двигаться. Поверхность будет двигаться с постоянной скоростью, если сила давления струи будет уравновешиваться силами сопротивления, которые встречает поверхность при своем движении. Такое состояние будем называть динамическим равновесием.

Таким образом, индикаторная мощность N_i может быть вычислена по формуле

$$N_i = Fu\cos\vartheta, \qquad (23\text{-}25)$$

где u — скорость поступательного прямолинейного движения поверхности;

ϑ — угол, который образует сила F со скоростью u.

Формулой (23-25) можно пользоваться и для случая, показанного на фиг. 23-13, подставляя в нее P вместо F, а $\cos\vartheta = 1$.

Исследуем подробнее мощность струи (фиг. 23-13). Подставляя вместо F его значения согласно формуле (23-21) и заменяя $Q = (v_0 - u)\omega$, получим

$$N_{i1} = \beta_0 \rho \omega (v_0 - u)^2 u. \qquad (23\text{-}26)$$

Коэффициентом полезного действия струи называется отношение индикаторной мощности струи к эффективной мощности ее потока, определяемой согласно формулам (10-10) и (10-13), как

$$N_{эф\,\varphi} = \alpha_0 \rho \omega \frac{v_0^3}{2}. \qquad (23\text{-}27)$$

Таким образом,

$$\eta_1 = \frac{N_{i1}}{N_{эф\,\varphi}} = \frac{2\beta_0}{\alpha_0}\left(1 - \frac{u}{v_0}\right)^2 \frac{u}{v_0}. \qquad (23\text{-}28)$$

Зависимость N_i и η_1 от u/v_0 $\left(\text{для } \frac{\beta_0}{\alpha_0} = 1\right)$ показана на фиг. 23-12.

Минимальное значение $N_{i1} = 0$ и $\eta_1 = 0$ будет при

$$u = 0 \quad \text{и} \quad u = v_0.$$

Максимальное значение N_{i1} и η_1 найдем, взяв производную от N_1 или, что то же самое, от η_1 по u/v_0. При этом получим

$$\frac{d\eta_1}{d(u/v_0)} = 2\left(1 - \frac{u}{v_0}\right)\frac{u}{v_0} + \left(1 - \frac{u}{v_0}\right)^2 = 0,$$

откуда следует, что $N_{i1\,макс}$ и $\eta_{1\,макс}$ будут при $v_0 = 3u$ и соответственно равны

$$N_{i1\,макс} = \frac{4}{27}\beta_0\rho\omega v_0^3, \tag{23-29}$$

$$\eta_{1\,макс} = \frac{8\beta_0}{27\alpha_0}. \tag{23-30}$$

Для криволинейной поверхности (фиг. 23-7) при $\theta = 0°$ получим

$$N_{i1\,макс} = \frac{4}{27}(\beta_0 + 1)\rho\omega v_0^3 \tag{23-31}$$

и

$$\eta_{1\,макс} = \frac{8(\beta_0 + 1)}{27\alpha_0}. \tag{23-32}$$

Мощность и к. п. д. определялись из предположения, что струя действует только на одну движущуюся поверхность. В большинстве же случаев действие струи воспринимается системой поверхностей, непрерывно попадающих под ее действие.

В результате этого оказывается, что в известные периоды времени действие струи передается не одной, а нескольким поверхностям. В то время как струя действует уже на новую поверхность, часть ее, еще находящаяся в соприкосновении с предыдущей поверхностью, продолжает на нее воздействовать. Результат оказывается таким же, как если бы струя действовала только на одну поверхность массой $\rho\omega v_0$.

На этом основании для рассмотренного выше случая согласно формуле (23-21)

$$P_x = \beta_0\rho\omega v_0(v_0 - u); \tag{23-33}$$

$$N_{i2} = \beta_0\rho\omega v_0(v_0 - u)u; \tag{23-34}$$

$$\eta_2 = \frac{N_{i2}}{N_{подв}} = 2\beta_0\left(1 - \frac{u}{v_0}\right)\frac{u}{v_0}. \tag{23-35}$$

Зависимость N_{i2} и η_2 от u/v_0 для $\beta_0 = \alpha_0 = 1$ показана на фиг. 23-12.

Максимальное значение N_{i2} и η_2 найдем аналогично предыдущему. При этом получим, что они будут соответствовать $v_0 = 2u$ и равны:

$$N_{i2\,макс} = \frac{1}{4}\beta_0\rho\omega v_0^3; \tag{23-36}$$

$$\eta_{2\,макс} = \frac{1}{2}\beta_0. \tag{23-37}$$

Для криволинейной поверхности (фиг. 23-7) при $\theta = 0°$ будем иметь

$$N_{i2\,макс} = \frac{\beta_0 + 1}{4}\rho\omega v_0^3, \tag{23-38}$$

$$\eta_{2\,макс} = \frac{\beta_0 + 1}{2\alpha_0} \approx 1. \tag{23-39}$$

23-7. Индикаторная мощность потока жидкости, действующего на поверхность, вращающуюся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси

Рассматриваемый случай имеет место в центробежных насосах, лопастных турбинах и во многих других случаях. Индикаторная мощность струи, под действием которой тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью Ω, определяется по формуле

$$N_i = M_f\Omega, \tag{23-40}$$

где M_f — момент относительно оси вращения сил, с которыми струя действует на вращающееся тело.

Если момент сил, с которыми жидкость действует на вращающуюся поверхность, равен моменту сил, сопротивляющихся вращению ее, то поверхность будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Такое состояние назовем динамическим равновесием.

Для определения момента сил M_f воспользуемся теоремой моментов количества движения для системы материальных точек — частиц жидкости, находящихся в канале (фиг. 23-14).

Поток жидкости в канале представим в виде одной струи, ось которой совпадает с осью канала. Примем также, что частицы жидкости подходят к каналу с абсолютной скоростью v_0, направление которой будет зависеть от устройства, подводящих жидкость к каналу. Абсолютное движение частицы будет складываться из ее переносного вращательного движения вместе с каналом и относительного движения по отношению к каналу. Абсолютная скорость частицы v по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на скорости переносного движения u и скорости относительного движения w (для неподвижного канала $u = 0$).

Рассматриваемая модель потока во вращающемся канале представляет его грубую схему. В действительности относительное движение частиц оказывается весьма сложным. Благодаря инерции поток жидкости в канале оказывает сопротивление его закручиванию.

Проявляется оно в том, что на рассмотренное выше движение накладывается относительное вращательное движение, имею-

щее направление, обратное вращению канала. Угловую скорость относительного вращения называют относительным вихрем. Относительный вихрь способствует увеличению скоростей на задней стороне поверхности и уменьшению их на передней.

Благодаря относительному вихрю частицы жидкости, находящиеся на выходе из канала (на одном и том же расстоянии от оси и имеющие поэтому одинаковые скорости переносного движения), будут иметь различное значение относительной скорости, а значит, и абсолютной.

Фиг 23-14 Действие струи на поверхность лопасти вращающегося колеса.

Таким образом, поле скоростей на выходе из вращающегося канала характеризуется большой неравномерностью, что, однако, здесь не учитывается.

Применительно к рассматриваемому случаю теорема моментов может быть сформулирована следующим образом. Производная по времени от момента количества движения системы материальных частиц, заполняющих полость канала относительно оси вращения, равняется главному моменту ΣM_a всех внешних сил, действующих на систему относительно той же оси. Внешними силами, действующими на систему, являются те же силы, которые подробно были рассмотрены в § 23-1.

Таким образом, уравнение моментов может быть представлено в виде:

$$\frac{dL}{dt} = M_{масс} + M_{ст} + M_э + M_1 = \Sigma M_a, \qquad (23\text{-}41)$$

где $M_{масс}$ — момент силы тяжести,

$M_{ст}$ — момент сил реакции стенки,

$M_э$ и M_1 — момент сил, с которыми на рассматриваемую систему материальных точек действует окружающая ее жидкость вне канала.

Рассуждая так же, как и в § 23-1, а именно: обозначая моменты количества движения массы жидкости в объемах 0, a и 1 относительно оси вращения соответственно через L_0, L_a и L_1, будем иметь следующее. Момент количества движения рассматриваемой системы в перемещенном положении относительно оси вращения равен алгебраической сумме $L_a + L_1$.

Момент количества движения системы в начальном положении равен алгебраической сумме $L_0 + L_a$, причем момент количества движения системы в объеме a относительно оси (поскольку движение установившееся, а канал вращается с постоянной угловой скоростью или неподвижен) в обоих случаях один и тот же. Таким образом, алгебраическое приращение момента количества движения относительно оси вращения за время dt равно:

$$dL = L_1 - L_0, \qquad (23\text{-}42)$$

т. е.

$$dL = \rho Q(\beta_1 v_1 \cos\theta_1 r_1 - \beta_0 v_0 \cos\theta_0 r_0)\, dt,$$

откуда после перехода к пределу

$$\frac{dL}{dt} = \rho Q(\beta_1 v_1 \cos\theta_1 r_1 - \beta_0 v_0 \cos\theta_0 r_0),$$

подставляя это в уравнение (23-41), найдем

$$\rho Q(\beta_1 v_1 \cos\theta_1 r_1 - \beta_0 v_0 \cos\theta_0 r_0) = \Sigma M_a. \qquad (23\text{-}43)$$

Момент сил, с которыми жидкость действует на поверхность M_F, равен по величине, но противоположен по знаку моменту $M_{ст}$. Поэтому согласно уравнению (23-43)

$$M_F = \rho Q \beta_0 v_0 \cos\theta_0 r_0 - \rho Q \beta_1 v_1 \cos\theta_1 r_1 + M_м + M_0 + M_э. \qquad (23\text{-}44)$$

Формула (23-44) выражает теорему Эйлера о главном моменте.

Если рассматривается не один канал, а система каналов, симметричная относительно оси вращения, то момент массовых сил (сил тяжести) равен нулю. Весьма часто принимаются равными нулю и моменты $M_э$ и M_1. Только в этом случае индикаторная мощность струи равна

$$N_i = \beta_0 \rho Q v_0 \cos\theta_0 r_0 - \beta_1 \rho Q v_1 \cos\theta_1 r_1)\Omega$$

Подставляя, вместо

$$r\Omega - u$$

получим

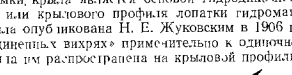
$$N = \rho Q(r_0 v_0 \cos\theta_0 u_0 - \beta v_1 \cos\theta_1 u_1). \qquad (23.45)$$

Формула (23.45) выражает теорему Эйлера о мощности.

Характер изменения мощности от оборотов и конструктивных элементов поверхности подробно исследуется в теории гидравлических турбин.

23.8. Взаимодействие жидкости с телом крылового профиля. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе

Теорема Н. Е. Жуковского для определения подъемной силы вместе с постулатом С. А. Чаплыгина о безотрывном обтекании задней кромки крыла является основой гидродинамической теории крыла или крылового профиля лопатки гидромашины. Эта теорема была опубликована Н. Е. Жуковским в 1906 г. в работе «О присоединенных вихрях» применительно к одиночному крылу и позже была им распространена на крыловой профиль, расположенный в так называемой решетке, образованной системой профилей[1].



Фиг. 23.15. Схема циркуляционного потока вокруг обтекаемого тела.

Фиг. 23.16. К определению циркуляции.

Сущность явления заключается в следующем.

Как было установлено выше, пограничный слой является источником возникновения вихрей, нарушающих плавное обтекание тела. Эти вихри являются причиной не только возникновения сопротивления давления, но и так называемой подъемной силы.

Возникая в потоке, они создают вокруг обтекаемого тела циркуляционное движение (фиг. 23.15), накладывающееся на основной поток, благодаря чему на противоположных сторонах обтекаемого тела скорости становятся неодинаковыми, что и создает разность давлений и вызывает появление подъемной силы

[1] Н. Е. Жуковский, О присоединенных вихрях, Труды Отд. физ. наук Общ. любителей естествознания, т. XIII, вып. 2, 1907. Н. Е. Жуковский. Избранные сочинения, т. II, Гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1948.

Для определения подъемной силы Н. Е. Жуковский предложил заменить действие сложной системы вихрей пограничного слоя воображаемым, присоединенным к рассматриваемому твердому телу вихрем, находящимся внутри обтекаемого тела и создающим вокруг тела циркуляционное движение.

Фиг. 23.17. Схема потока при обтекании решетки крыловых профилей.

Схема потенциального потока с присоединенным вихрем позволила Н. Е. Жуковскому, оставаясь в рамках гидромеханики идеальной жидкости, доказать для одиночного крыла следующую теорему: «Сила давления невихревого потока, текущего со скоростью v и обтекающего контур с циркуляцией Γ, выражается формулой

$$P = \rho\Gamma v; \qquad (23.46)$$

направление этой силы мы получим, если вектор v повернем на прямой угол в сторону, противоположную циркуляции».

Циркуляцией вектора скорости называется интеграл

$$\Gamma = \oint v dl \cos\theta, \qquad (23.47)$$

взятый (фиг. 23.16) по произвольному замкнутому контуру. Здесь v — скорость частиц на контуре, а θ — угол, который вектор скорости образует с касательной к контуру.

Докажем теорему для решетки. Для этого рассмотрим обтекание жидкостью системы лопаток (решетки), установленных на одинаковых расстояниях t (шаг лопаток) друг от друга (фиг. 23.17). Окружим одну из лопаток контрольной поверхностью, сечение которой образовано двумя линиями тока, находящимися друг от друга на расстоянии шага лопаток t, и двумя поперечными линиями длиной t (на фиг. 23.17 контрольная поверхность пока

зана пунктиром). Воспользуемся теоремой об изменении количества движения для отсека потока, ограниченного контрольной поверхностью. Внешними силами, действующими на систему частиц жидкости, будут главный вектор сил реакции поверхностей лопатки (обозначим проекцию главного вектора на ось решетки x и ось y через X и Y), а также силы от гидродинамического давления на контрольной поверхности. Вес жидкости, а также силы трения на контрольной поверхности мы не учитываем. Выражая теорему об изменении количества движения в проекциях на ось x и y и принимая $\rho = 1$, получим:

$$X = \rho b t v_м \cdot (v_1 \cos\alpha_1 - v_0 \cos\alpha_0); \tag{23-48}$$

$$Y = (p_0 - p_1) b t, \tag{23-49}$$

где

$$v_м = v_0 \sin\alpha_0 = v_1 \sin\alpha_1 \tag{23-50}$$

— меридиональная проекция скорости, b — ширина лопасти,

$$Q = v_м b t \text{ — расход} \tag{23-51}$$

Заметим, что приращение проекции количества движения на ось y согласно уравнению (23-50) равно нулю.

Вместо $p_0 - p_1$ в уравнение (23-49) подставим его значение из уравнения Бернулли

$$p_0 - p_1 = \rho \cdot \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right). \tag{23-52}$$

В связи с формулами (23-49) и (23-50) для Y получим:

$$Y = \rho b t (v_1 \cos\alpha_1 - v_0 \cos\alpha_0) \cdot \frac{v_1 \cos\alpha_1 + v_0 \cos\alpha_0}{2} + \gamma b t h_n. \tag{23-53}$$

Вычислим циркуляцию для контура контрольной поверхности (см. фиг. 23-17). Будем обходить его по часовой стрелке. На линиях тока значения $v \cos\psi$ для соответствующих точек будут одинаковы, но противоположны по знаку. Поэтому при суммировании они взаимно уничтожаются. Вследствие этого для циркуляции по замкнутому контуру контрольной поверхности получим следующее выражение:

$$\Gamma = (v_1 \cos\alpha_1 - v_0 \cos\alpha_0) t \tag{23-54}$$

Подставим это значение в формулы (23-48) и (23-53). Будем иметь:

$$X = \rho b \Gamma v_м, \tag{23-55}$$

$$Y = \rho b \Gamma \cdot \frac{v_1 \cos\alpha_1 + v_0 \cos\alpha_0}{2} + \gamma b t h_n. \tag{23-56}$$

Вычислим сначала значение силы реакции, пренебрегая потерями удельной энергии h_n. В этом случае получим:

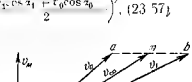
$$R_m = \sqrt{X^2 + Y_m^2} = \rho b \Gamma \sqrt{v_м^2 + \left(\frac{v_1 \cos\alpha_1 + v_0 \cos\alpha_0}{2}\right)^2}, \tag{23-57}$$

или

$$R_m = \rho b \Gamma v_\infty, \tag{23-58}$$

где

$$v_\infty = \sqrt{v_м^2 + \left(\frac{v_1 \cos\alpha_1 + v_0 \cos\alpha_0}{2}\right)^2} \tag{23-59}$$



Фиг. 23-18. Вектор v_∞ есть средняя геометрическая векторов v_0 и v_1.

есть средняя геометрическая векторов v_1 и v_0. В этом легко убедиться. Для этого разделим отрезок ab (фиг. 23-18) пополам и соединим середину (точку m) вектором nm, откуда и получим формулу (23-59). Из формул (23-55) и (23-56) следует, что направление силы реакции зависит от знака циркуляции. Для $\Gamma > 0$ сила R_m направлена, как показано на фиг. 23-19.

Покажем, что сила реакции поверхности R_m перпендикулярна к v_∞. Для этого вычислим $\cos(R_m, v_\infty)$. Принимая во внимание фиг. 23-18, получим:

$$\cos(R_m, v_\infty) = \frac{v_0 \cos\alpha_0 + v_1 \cos\alpha_1}{2 v_\infty} \cdot \frac{X}{R_m} - \frac{v_м}{v_\infty} \frac{Y_m}{R_m} = 0, \tag{23-60}$$

откуда

$$\angle(R_m, v_\infty) = 90 \text{ или } 270^\circ,$$

а значит, угол (фиг. 23-19)

$$\varphi_m = \alpha_\infty.$$

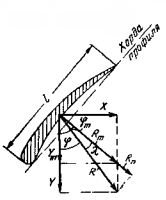
Вследствие гидравлических сопротивлений реальная величина реакции лопатки R направлена по углом $\varphi < \varphi_m$.

Обозначим:

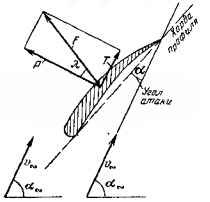
$$\varphi = \varphi_m - \lambda. \tag{23-61}$$

Проекцию реальной силы R на нормаль к v_∞, т. е. на направление R_m, обозначим через R_n (фиг. 23-19). Подъемной силой P называется сила, равная R_n, но обратно направленная (фиг. 23-20)

$$P = -R \cos\lambda = -\frac{X \cos\lambda}{\sin(\varphi_m - \lambda)}. \tag{23-62}$$



Фиг 23 19. К определению сил реакции профиля.



Фиг. 23-20 Разложение силы на подъемную силу и лобовое сопротивление

Подъемную силу принято выражать через коэффициент подъемной силы C_n и представлять в виде:

$$P = C_n \rho \frac{v_\infty^2}{2} \cdot bl, \tag{23-63}$$

где l — длина хорды (см. фиг. 23-19).

Проекцию силы F (равной, но противоположной R) на v_∞ (направление, перпендикулярное R_m) называют лобовым сопротивлением (см. фиг 23-20). Обозначим ее через

$$T = F \sin\lambda = P \operatorname{tg}\lambda, \tag{23-64}$$

в то же время аналогично формуле (23-63)

$$T = C_m \rho \frac{v_\infty^2}{2} \cdot bl, \tag{23-65}$$

где C_m — коэффициент лобового сопротивления;

$$\operatorname{ctg}\lambda = \frac{P}{T} = \frac{C_n}{C_m} \tag{23-66}$$

называется качеством профиля;

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{T}{P} \tag{23-67}$$

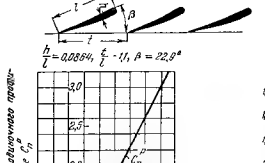
называется обратным качеством профиля.

Коэффициенты C_n и C_m найдены экспериментально для большого количества одиночных профилей, испытанием их

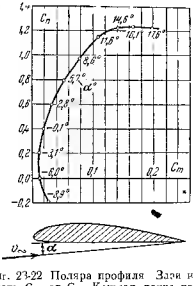
в аэродинамических или гидродинамических трубах[1]. Исследование этих коэффициентов показывает их зависимость от угла атаки (фиг. 23-21), а также от взаимного расположения профилей; так, например, коэффициент C_n^p профиля в решетке при положительных углах атаки всегда больше одиночного C_n.

Отсутствие пологого участка у линии C_n^p объясняется тем, что отрыв потока у одиночного профиля наступает при меньших углах атаки. На фиг. 23 22 показана поляра профиля.

Гидродинамические характеристики профилей позволяют подбирать профили и углы атаки для обеспечения необходимых условий.



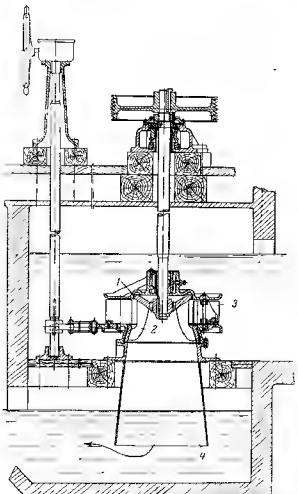
Фиг. 23 2. Зависимость коэффициента подъемной силы C_n одиночного профиля и профиля в решетке C_n^p от угла атаки α.



Фиг. 23-22 Поляра профиля. Зависимость C_n от C_m. Каждая точка поляры соответствует определенным углам атаки.

Задача 23-1. Турбина центростремительная — осевая. Рабочее колесо *1* турбины (фиг 23-23 и 23 24) имеет систему каналов, образованных криволинейными лопатками *2*, по которым протекает жидкость, подводимая к рабочему колесу через направляющий аппарат *3*, сообщающий жидкости

[1] Всесоюзный институт гидромашиностроения (ВИГМ), Атлас гидродинамических характеристик профилей, Г. Ф. Проскура, Гидродинамика турбомашин, Машгиз, 1954, стр. 266 267, В С Квятковский, Рабочий процесс осевой гидротурбины, ч. I, Машгиз, 1951.



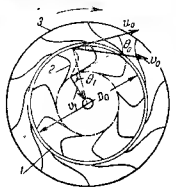
Фиг. 23.23. Турбина радиально-осевая

1 — корпус колеса, 2 — лопасть, 3 — направляющий аппарат, 4 — отсасывающая труба. К задаче 23.1.

необходимое направление скорости v_0. По выходе из рабочего колеса жидкость попадает в отсасывающую трубу 4 и затем в отводящий канал.

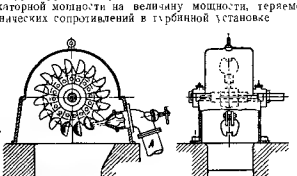
Требуется определить индикаторную мощность, которую жидкость передает турбине согласно следующим данным: расход жидкости через турбину $Q = 3$ *м³/сек*, число оборотов турбины $n = 200$ об/мин, диаметр рабочего колеса $D_0 = 1$ *м*, скорость подвода жидкости $v_0 = 9$ *м/сек*, угол подвода $\theta_0 = 20°$, угол отвода $\theta_1 = 90°$.

Решение. Мощность, о которой идет речь в задаче, есть так называемая индикаторная мощность турбины N_i. Это есть та мощность, которую турбина воспринимает от протекающей через нее жидкости. Мощность, теряемая потоком при протекании через турбину, больше индикаторной мощности турбины на величину гидравлических потерь мощности внутри турбины. Мощность, которую турбина передает, например на вал генератора, будет меньше индикаторной мощности на величину мощности, теряемой на преодоление механических сопротивлений в турбинной установке.



Фиг. 23.24. Схема колеса турбины

корпус 2, лопасть, 3 — направляющий аппарат. К задаче 23.1



Фиг. 23.25. Ковшевая турбина. К задаче 23.2

Для определения индикаторной мощности в киловаттах воспользуемся формулой (23.45), принимая $\cos\theta_2 = 0$.

$$u_0 = \frac{\pi D_0 n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 200}{60} = 10{,}46 \text{ м/сек}.$$

Получим (при $\eta_0 = 1$)

$$N_i = \frac{1}{102} 3 \cdot 9 \cdot 0{,}94 \cdot 10{,}46 = 266 \text{ квт}.$$

Задача 23.2. Ковшевая турбина. Рабочее колесо турбины (фиг. 23.25) состоит из стального круглого диска, насаженного на вал и имеющего на периферии ковши, форма которых показана на фиг. 23.26.

Посредством специального устройства A на ковши колеса направлена струя воды со скоростью $v_0 = 20$ *м/сек*. Сечение струи по выходе из насадка $\omega = 0{,}005$ *м²*. Расход воды $Q = v\omega = 100$ *л/сек*. Требуется определить

теоретическую мощность, развиваемую турбиной при 240 об/мин, принимая, что струя воды перпендикулярна (фиг. 23-27) к плоскости $m-n$ и что в свою очередь плоскость $m-n$ образует с горизонтом угол $\theta = 30°$. Угол $\delta = 5°$. Радиус колеса $r = 0{,}6$ *м*. Линейная скорость лопаток на радиусе r $u = r\Omega$, $u = 0{,}6 \cdot 8\pi \approx 15{,}07$ *м сек*.

Решение. Для определения мощности, развиваемой турбиной, воспользуемся схемой конца и потока, изображенной на фиг. 23-27

Фиг. 23-26. Ковши турбины. К задаче 23-2.

Фиг. 23-27. Кинематика потока в ковше турбины. К задаче 23-2

Принимая направление вектора скорости переносного движения u (линейная скорость на ободе колеса), как показано на фигуре, скорость относительного движения жидкости при вступлении ее на ковши колеса определим из параллелограмма скоростей по формуле

$$w_0 = \sqrt{v_0^2 + u^2 - 2v_0u\cos 30°} = \sqrt{400 + 226 - 602{,}8 \cdot 0{,}866} = 10{,}15 \text{ м/сек}.$$

Определим проекцию силы давления жидкости на ковши рабочего колеса на направление u. Для этого воспользуемся уравнением (23-23), которое применительно к рассматриваемому случаю (если принять $\beta_0 = \beta_1 = 1$) может быть представлено в виде

$$F_u = M_0v_0\cos\theta - M_2[u - w_2\cos(\theta + \delta)] - M_1[u - w_1(\cos\theta + \delta)],$$

где $M_1 = M_2 = 0{,}5M_0$;

$$M_0 = \rho\omega w_0 = \frac{1\,000}{9{,}81} \cdot 0{,}005 \cdot 10{,}15 = 5{,}14 \text{ кГ сек/м}$$

или в виде

$$F_u = M_0[v_0\cos\theta - u] + 0{,}5w[\cos(\theta - \delta) + \cos(\theta + \delta)].$$

Подставляя цифры, будем иметь

$$F_u = 5{,}14[(20 \cdot 0{,}87 - 15{,}07) + 0{,}5 \cdot 10{,}15(0{,}996 + 0{,}82)] = 56{,}55 \text{ кГ}$$

Мощность определим по формуле

$$N = F_uu = 55{,}56 \cdot 15{,}07 = 852{,}96 \text{ кГм сек} = 11{,}36 \text{ л. с}$$

Мощность будет большей, если расчет вести на массу, соответствующую полному расходу жидкости через сопло, о чем было указано на стр. 366

Обычно направление оси струи совпадает с направлением скорости переносного движения, т. е. угол $\theta = 0$. Для этого случая

$$N = \rho Q[(v_0 - u) + w_1\cos\delta]\,u,$$

а величина мощности в рассматриваемом случае оказывается равной

$$N = 20{,}17 \text{ л. с}.$$

Глава двадцать четвертая

БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Движение жидкости в канале или частично заполненном трубопроводе называется безнапорным движением. Особенностью его является наличие свободной поверхности с одинаковым давлением по всей ее длине.

Большой вклад в исследование безнапорных потоков внесли русские и советские ученые Б. А Бахметев, Н Н. Павловский, а также И. И. Агроскин, А. Н Ахутин, Е. А. Замарин, В. Д. Журин, М. Д Чертоусов и многие другие. Из иностранных ученых следует отметить французского гидравлика Базена, чьи исследования распределения скоростей в реках не потеряли своего значения в наше время. В настоящей главе будут рассмотрены некоторые основные вопросы, относящиеся лишь к установившемуся безнапорному турбулентному движению

24-1. Дифференциальное уравнение установившегося безнапорного потока

Установившийся поток в открытом русле может быть или равномерным (фиг. 24-1), или неравномерным (фиг. 24-2).

Равномерный поток по всей длине имеет одинаковую среднюю скорость. Поэтому по всей длине потока остается одинаковой и площадь живого сечения.

В неравномерном потоке вдоль потока изменяется средняя скорость, поэтому, хотя расход и остается постоянным, по длине потока изменяются площади живых сечений.

Для вывода основных уравнений будем исходить из уравнения Бернулли для потока реальной жидкости [формула (10-23)].

Поскольку на свободной поверхности $p = \text{const}$, это уравнение может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{dl}\left(z + \frac{\alpha v^2}{2gw^2}\right) + J = 0, \qquad (24\text{-}1)$$

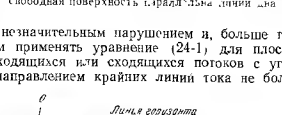
где z — координата свободной поверхности.

Уравнение (24-1) справедливо при условии, что в живых сечениях потока давления распределяются по гидростатическому закону. Как следует из формулы (8-29), в идеальной жидкости строго это имеет место только в прямолинейных потоках (радиус кривизны траектории равен бесконечности), имеющих плоские живые сечения. В реальной жидкости, как следует из уравнений (9-18) — (9-20), это имеет место только в прямолинейном ламинарном движении. В прямолинейном турбулентном движении

вследствие пульсации скоростей гидростатический закон распределения давлений несколько нарушается. Вместе с тем принято считать возможным в расчетах турбулентных потоков пренебре-

Фиг. 24-1. В равномерном движении в открытом русле свободная поверхность параллельна линии дна

гать этим незначительным нарушением и, больше того, считать возможным применять уравнение (24-1) для плоских сечений слабо расходящихся или сходящихся потоков с углами, образуемыми направлением крайних линий тока не больше 8—10°,



Фиг. 24-2. В неравномерном движении глубина потока по длине изменяется.

а также и для криволинейных потоков с очень большими радиусами кривизны. Такие потоки называются плавно изменяющимися и в них можно считать давления в плоскости живого сечения распределяющимися по законам гидростатики.

24-2. Равномерное движение

При равномерном движении (ω = const) линия свободной поверхности параллельна линии дна (фиг. 24-1). Из уравнения (24-1) имеем.

$$\frac{dz}{dl} = -J, \tag{24-2}$$

где

$$J = \frac{h_g}{l} = \lambda \cdot \frac{l}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Интегрируя уравнение (24-2), получаем:

$$z_1 - z_2 = \lambda \cdot \frac{l}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g}. \tag{24-3}$$

Отсюда следует, что равномерное движение в канале может иметь место при

$$z_1 > z_2,$$

т. е. если канал имеет уклон.

Обозначим синус угла наклона дна русла θ через

$$i = \sin\theta. \tag{24-4}$$

Назовем скоростным коэффициентом C выражение

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \left[\frac{м^{1/2}}{сек}\right]. \tag{24-5}$$

Тогда скорость v можно определить по формуле

$$v = C\sqrt{Ri}. \tag{24-6}$$

Эта формула называется формулой Шези. Уравнение расхода $Q = v\omega$ представим в виде

$$Q = K\sqrt{i}, \tag{24-7}$$

где

$$K = \omega C\sqrt{R} \tag{24-8}$$

называется модулем расхода и имеет тот же гидравлический смысл, что и модуль расхода в трубопроводе.

Заметим также, что при равномерном движении уклон дна канала равен гидравлическому уклону $i = J$.

Исследования А. В. Караушева показывают, что в широких руслах распределение скоростей по средним вертикалям вполне удовлетворительно подчиняется формуле Базена, имеющей вид:

$$v = v_{макс} - m\left(\frac{h}{H}\right)^2\sqrt{H},$$

где $v_{макс}$ — максимальная скорость по средней вертикали (приблизительно на глубине 0,3 H),
h — глубина точки относительно уровня с максимальной скоростью,
H — глубина реки;
m — коэффициент, равный по определениям Базена 24, по Буссинеску 22,3, а по исследованиям А. В. Караушева, равный 13,5.

Логарифмическая формула (14.15) дает неудовлетворительное совпадение с опытом.

24-3. Скоростной коэффициент

При расчете каналов в области квадратичного режима в настоящее время наибольшее распространение в Советском Союзе получили формулы академика Н. Н. Павловского и профессора И. И. Агроскина.

Академик Н. Н. Павловский представляет свою формулу в виде.

$$C = \frac{1}{n} R^{y}, \qquad (24\text{-}9)$$

где

$$y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}\,(\sqrt{n} - 0{,}1) \qquad (24\text{-}10)$$

или в сокращенном виде:

$$C = \frac{1}{n} R^{1{,}5\sqrt{n}} \quad (\text{при } R < 1\ м); \qquad (24\text{-}11)$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1{,}3\sqrt{n}} \quad (\text{при } R > 1\ м). \qquad (24\text{-}12)$$

В этих формулах n — коэффициент, зависящий от степени шероховатости стенок. Его значения по данным Н. Н. Павловского приведены в табл. 24-1 для гидравлических радиусов в метрах.

В табл. 24-2 приведены значения C по Павловскому.

Проф. И. И. Агроскин предложил формулу в виде:

$$C = 17{,}72\,(k + \lg R), \qquad (24\text{-}13)$$

где k для R [$м$] имеет значение, приведенное в табл. 24-1.

Для квадратичной области может быть применена и формула (14-32), которая после замены

$$Re_d = 4Re_R = 4\frac{vR}{\nu} \qquad (24\text{-}14)$$

приводится к виду:

$$C = 20{,}75 + 17{,}72 \lg\left(\frac{R}{\Delta}\right) \qquad (24\text{-}15)$$

Значения Δ приведены в табл. 24-1. Эти значения соответствуют коэффициенту k, вычисленному проф. И. И. Агроскиным применительно к формуле (24-13).

Для гладких стенок формула (14-48) приводится к виду.

$$C = 15{,}95 \lg\left(\frac{Re_R}{1{,}7}\right). \qquad (24\text{-}16)$$

Промежуточная область исследована недостаточно.

Таблица 24-1

Значения коэффициента n формулы (24-9), k формулы (24-13) и Δ формулы (24-15)

Род стенки	n	k	Δ, мм	Род стенки	n	k	Δ, мм
Исключительно гладкие поверхности, поверхности, покрытые эмалью или глазурью	0,009	6,26	0,0081	Средняя кирпичная кладка, облицовка из тесаного камня в средних условиях. Значительно загрязненные водостоки. Брезент по деревянным рейкам	0,015	3,76	2,[illegible]74
Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные. Лучшая штукатурка из чистого цемента	0,010	5,64	0,0339	Хорошая бутовая кладка, старая (расстроенная) кирпичная кладка; сравнительно грубая бетонировка. Исключительно гладкая, весьма хорошо разработанная скала	0,017	3,32	7,089
Лучшая цементная штукатурка (1/3 песку). Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные. Хорошо остроганные доски	0,011	5,12	0,1134	Каналы, покрытые толстым, устойчивым илистым слоем, каналы в плотном лессе и в плотном мелком гравии, затянутые сплошной илистой пленкой (все притом в безукоризненном состоянии)	0,018	3,13	11,[illegible]8
Нестроганные доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации, весьма чистые водосточные трубы; весьма хорошая бетонировка	0,012	4,70	0,2955	Средняя (вполне удовлетворительная) бутовая кладка, булыжная мостовая. Каналы, весьма чисто высеченные в скале. Каналы в лессе, плотном гравии, плотной земле, затянутые илистой пленкой (в нормальном состоянии)	0,020	2,82	22,4[illegible]8
Тесовая кладка в лучших условиях, хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях, несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013	4,33	0,6929	Каналы в плотной глине. Каналы в лессе, гравии, земле, затянутые несплошной (местами прерываемой) илистой пленкой. Большие земляные каналы, находящиеся в условиях содержания и ремонта выше средних	0,0225	2,50	46,84
Загрязненные трубы (водопроводные и водосточные), бетонировка каналов в средних условиях	0,014	4,02	1,4245				

Таблица 24-2

Значения коэффициента C по формуле Павловского (24-9)

R	0.01	0.015	0.017	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040
0,10	67,5	54,3	38,1	30,6	22,4	17,3	13,8	11,2
0,12	68,8	55,8	39,5	32,0	23,5	18,3	14,7	12,1
0,14	70,3	57,2	40,7	33,0	24,5	19,1	15,4	12,8
0,16	71,5	58,4	41,8	34,0	25,4	19,1	16,1	13,4
0,18	72,6	59,5	42,7	34,8	26,2	20,6	16,8	14,0
0,20	73,7	60,4	43,6	35,7	26,9	21,3	17,4	14,5
0,22	74,6	61,3	44,4	36,4	27,6	21,9	17,9	15,0
0,24	75,5	62,1	45,2	37,1	28,3	22,5	18,5	15,5
0,26	76,3	62,9	45,9	37,8	28,8	23,0	18,9	16,0
0,28	77,0	63,6	46,5	38,4	29,4	23,5	19,4	16,4
0,30	77,7	64,3	47,2	39,0	29,9	24,0	19,9	16,8
0,35	79,3	65,8	48,6	40,3	31,1	25,1	20,9	17,8
0,40	80,7	67,1	49,8	41,5	32,2	26,0	21,8	18,6
0,45	82,0	68,4	50,9	42,5	33,1	26,9	22,6	19,4
0,50	83,1	69,5	51,9	43,5	34,0	27,8	23,4	20,1
0,55	84,1	70,4	52,8	44,4	34,8	28,5	24,0	20,7
0,60	85,3	71,4	53,7	45,2	35,5	29,2	24,7	21,3
0,65	86,0	72,2	54,5	45,9	36,2	29,8	25,3	21,9
0,70	86,8	73,0	55,2	46,6	36,9	30,4	25,8	22,4
0,80	88,3	74,5	56,5	47,9	38,0	31,5	26,8	23,4
0,90	89,4	75,5	57,5	48,8	38,9	32,3	27,6	24,1
1,00	90,9	76,9	58,8	50,0	40,0	33,3	28,5	25,0
1,10	92,0	78,0	59,8	50,9	40,9	34,1	29,3	25,7
1,20	93,1	79,0	60,7	51,8	41,6	34,8	30,0	26,3
1,30	94,0	79,9	61,5	52,5	42,3	35,5	30,6	26,9
1,50	95,7	81,5	62,9	53,9	43,6	36,7	31,7	28,0
1,70	97,3	82,9	64,3	55,1	44,7	37,7	32,7	28,9
2,0	99,3	84,8	65,9	56,6	46,0	38,9	33,8	30,0
2,5	102,1	87,3	68,1	58,7	47,9	40,6	35,4	31,5
3,0	104,4	89,4	69,8	60,3	49,3	41,9	36,6	32,5

24-4. Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала

Гидравлическим наивыгоднейшим сечением канала называется сечение, соотношение между поперечными размерами которого при заданной площади и уклоне обеспечивает максимальный расход.

Укажем, что гидравлически наивыгоднейшее сечение часто не является экономически наивыгоднейшим. Например, полукруглое отверстие гидравлически выгоднее прямоугольного, но благодаря большей своей стоимости оно не используется при строительстве каналов

В гидротехнической практике в большинстве случаев применяется трапецоидальное сечение (фиг. 24-1) В качестве примера

определим гидравлически наивыгоднейшие соотношения для канала с трапецоидальным сечением, считая угол наклона откоса ϑ заданным

Назовем коэффициентом заложения откоса величину

$$m = \operatorname{ctg} \vartheta \tag{24-17}$$

и обозначим

$$m' = 2 \cdot \operatorname{cosec} \vartheta = 2\sqrt{1 + m^2}. \tag{24-18}$$

Площадь живого сечения и смоченный периметр найдем по формулам

$$\omega = (b + mh)\, h, \tag{24-19}$$

$$\chi = b + m'h = \frac{\omega}{h} + (m' - m)\, h. \tag{24-20}$$

Из равновеликих сечений, как следует из формулы (24-8), гидравлически наивыгоднейшие соотношения должны соответствовать максимальному значению гидравлического радиуса Поэтому гидравлически наивыгоднейшие соотношения найдем, приравняв нулю производную от $R = \frac{\omega}{\chi}$ по h. Получим:

$$\frac{dR}{dh} = \frac{dR}{d\chi}\frac{d\chi}{dh} = \frac{\omega}{\chi^2}\left(-\frac{\omega}{h^2} + m' - m\right) = 0,$$

откуда гидравлически наивыгоднейшая высота $h_{г.н}$ при заданной площади будет равна:

$$h_{г.н} = \sqrt{\frac{\omega}{m' - m}} \tag{24-21}$$

и соответственно смоченный периметр

$$\chi_{г.н} = 2(m' - m)\, h_{г.н} = 2\sqrt{(m' - m)\,\omega}, \tag{24-22}$$

а гидравлический радиус

$$R_{г.н} = \frac{h_{г.н}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(m' - m)}\,\omega} \tag{24-23}$$

и ширина

$$b_{г.н} = \sqrt{\frac{(m' - 2m)^2}{m' - m}\,\omega}. \tag{24-24}$$

В табл. 24-3 приведены значения $h'_{г.н}$, $\chi'_{г.н}$, $R'_{г.н}$ и $b'_{г.н}$, соответствующие гидравлически наивыгоднейшим значениям при $\omega = 1$. Для получения значений, соответствующих площади ω, табличные значения надо умножить на $\sqrt{\omega}$. В этой же таблице приведены гидравлически наивыгоднейшие

Значения величин, характеризующих гидравлически наивы-

θ	90°	75°58′	68°25′	53°8′	45°
m	0	0,250	0,500	0,75	1,0
m'	2	2,062	2,236	2,5	2,828
h'	0,707	0,7429	0,75890	0,75590	0,7397
Y'	2,828	2,6923	2,6349	2,6455	2,7043
R'	0,354	0,37145	0,37945	0,37795	0,36985
b'	1,41	1,160	0,938	0,760	0,6125
b'/h'	2	1,562	1,236	1,0	0,828

Таблица 24-4

Значения коэффициентов откоса m при высоте откоса $h \leq 10$ м

Категория грунта или вид облицовки	$m = ctg\,\theta$	θ	$\frac{m'}{2} = \sqrt{1+m^2}$
1 Мелкозернистые песчаные грунты	3,0÷3,5	18°25′÷15°55′	3,16 3,64
2. Супесчаные грунты или слабоуложенные грунты	2,0÷2,5	26°35′÷21°50′	2,24–2,69
3 Плотная супесь и легкий суглинок	1,5÷2,0	33°40′ : 26°35′	1,80–2,24
4. Гравелистые и песчано-гравелистые грунты	1,5	33°40′	1,80
5 Тяжелые суглинки, плотные лессы и обычные глины	1,0÷1,5	45°÷33°40′	1,41–1,80
6. Тяжелые плотные глины	1,0	45°	1,41
7 Различные скальные породы в зависимости от степени выветренности	0,5÷0,10	63°30′÷84°15′	1,18÷1,005

Примечания

1 Надводные откосы принимаются более крутыми, при облицовке из бетона, асфальта бетона . . . . . $\geq 1,25$
при облицовке из гравийной отсыпи и каменной наброски . . . . . $\leq 1,50$
при облицовке из пластичных материалов (глинистых, суглинистых) . . . $\geq 2,5$

2. Согласно § 85 ТУ и Н устойчивость откосов проверяется специальным расчетом при высоте откоса $h > 5$ м в техническом проекте для каналов всех трех классов, а в проектном задании только для каналов I класса.

В условиях отсутствия сведений о геотехнических свойствах грунтов и для предварительных проектировок следует принимать значения не менее.

	m для неукрепленных откосов	m для бетонированных откосов
При высоте откоса $h \leq 3,0$ м	1,5	1,25
» » » $h = 3,0 \div 5,0$ м	2,0	1,75

При высоте $h > 5,0$ м и более устойчивость откосов должна быть проверена специальными расчетами.

Таблица 24-3

годнейшие соотношения трапецоидального канала при $\theta = 1$

38°39′	33°11′	29°45′	26°34′	22°38′	21°18′	18°20′
1,250	1,50	1,750	2,00	2,25	2,5	3
3,202	3,606	4,031	4,472	4,974	5,385	6,325
0,7.57	0,68910	0,6620	0,6360	0,6 160	0,58870	0,54840
2,7941	2,9025	3,0214	3,1444	3,2708	3,3968	3,6469
0,35735	0,34455	0,3310	0,3190	0,3530	0,29435	0,27421
0,502	0,466	0,352	0,300	0,280	0,226	0,180
0,702	0,633	0,532	0,472	0,474	0,384	0,325

значения b/h. Значения коэффициента откоса m и соответствующих ему углов θ при высоте откоса $h \leq 10$ м, применяющиеся в строительстве согласно ТУ и II Главгидроэнергостроя (ТУ-24-108-48), приведены в табл. 24-4.

24-5. Допускаемые скорости

При проектировании каналов допускаемые скорости течения, так же как и при проектировании напорных трубопроводов, имеют большое экономическое значение, так как выбор скорости течения определяет размеры канала.

Крайние значения скоростей (минимальные и максимальные) ограничиваются двумя причинами. При малых скоростях сечение канала получается большим, что, увеличивая объем земляных работ, удорожает строительство. Кроме того, при малых скоростях происходит заиление канала вследствие оседания взвешенных в жидкости частиц. При больших скоростях сечение получается меньше. Это уменьшает объем земляных работ, однако при этом требуется более прочное покрытие стенок канала, что требует дополнительных затрат. Правильный выбор расчетной скорости поэтому имеет большое значение. В каждом отдельном случае этот вопрос должен решаться конкретно с учетом всех местных условий.

В табл. 24-5 приведены значения допускаемых средних скоростей в каналах по данным проф. Е. А. Замарина

Задача 24-1. Требуется определить наивыгоднейшие соотношения размеров трапецоидального канала при $\theta = 45$ для пропуска $Q = 9$ м³/сек при скорости $v = 1,5$ м/сек и необходимый при этом уклон i (при $n = 0,014$, $k = 4$ и $\Delta = 1,4$)

Решение. Необходимая площадь

$$\omega = \frac{Q}{v} = \frac{9}{1,5} = 6 \text{ м}^2.$$

Таблица 24.5

Допускаемые средние скорости в каналах[1]

№ п/п.	Наименование грунтов или типов креплений	Допускаемые средние скорости, м/сек при средней глубине потока			
		0,4 м	1,0 м	2,0 м	3 м и более
1	Малоплотные глины и суглинки	0,33	0,40	0,46	0,50
2	Среднеплотные глины и суглинки	0,70	0,85	0,95	1,1
3	Плотные глины и суглинки	1,0	1,2	1,4	1,5
4	Очень плотные глины и суглинки	1,4	1,7	1,9	2,1
5	Лессовые грунты средней плотности в условиях закончившихся просадок	0,6	0,7	0,8	0,85
6	Дерн свежий плашмя	0,6	0,8	0,9	1,0
7	То же, в стенку	1,5	1,8	2,0	2,2
8	Свежие хворостяные покрытия и хворостяные крепления	1,8	2,2	2,5	2,7
9	Одиночная мостовая из булыжника размером 15—20 см	2,5—2,9	3,0—3,5	3,5—4,0	3,8—4,3
10	Двойная мостовая из булыжника размером 15—20 см	3,1—3,6	3,7—4,3	4,3—5,0	4,6—5,4
11	Габионы	до 4,2	до 5,0	до 5,7	до 6,2
12	Кладка из кирпича на цементном растворе	1,6	2,0	2,3	2,5
13	Бутовая кладка из слабых пород на цементном растворе	2,9	3,5	4,0	4,4
14	То же, из средних пород	5,8	7,0	8,1	8,7
15	Кладка из клинкера на цементном растворе	7,1	8,5	9,8	11
16	Деревянные лотки	до 25 м в секунду			

[1] Согласно нормам Главгидроэнергостроя (см. подробнее П. Г. Киселев, Справочник по гидравлическим расчетам, Госэнергоиздат, 1950).

Согласно табл. 24.3

$$b_{г.к} = b'\sqrt{\omega} = 0{,}6125\sqrt{6} = 1{,}5\ м^2,$$

$$B_{г.к} = 5{,}12\ м,$$

$$h_{г.к} = h'\sqrt{\omega} = 0{,}7397\sqrt{6} = 1{,}81\ м,$$

$$R_{г.к} = R'\sqrt{\omega} = \frac{h_{г.к}}{2} = 0{,}905\ м;$$

$$\chi_{г.к} = \chi'\sqrt{\omega} = 2{,}704\sqrt{6} = 6{,}6\ м.$$

$C_П = 70$ (по Павловскому), $C_A = 70$ (по Агроскину), $C_Ф = 70$ (по Фрекелю),

$$i = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{81}{4002^2} = 5{,}063^{00}/_{00},$$

где $^{00}/_{00}$ означает десятичные доли

Задача 24-2. Определить расход в канале предыдущей задачи ($i = 5{,}063^{00}/_{00}$), принять $h = 1{,}5$ м².

Решение. $Q = K\sqrt{i} = 276{,}184 \cdot 0{,}0225 = 6{,}18$ м³/сек,

где для заданной величины h и δ

$$\omega = 4{,}5\ м^2;$$
$$R = 0{,}785\ м;$$
$$C = 69{,}02\ м^{1/2}/сек,$$
$$K = 276{,}04\ м^3/сек$$

24-6. Дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося установившегося движения жидкости. Критическая глубина

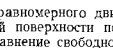
Одним из важнейших вопросов теории неравномерного движения является построение кривой свободной поверхности потока. Сначала составим дифференциальное уравнение свободной поверхности, воспользовавшись уравнением (24-1). Определим необходимые величины, а именно:

$z = z_1 + h$ (согласно фиг. 24-2);

$\frac{dz}{dl} = i$ (где $i = \sin\theta$);

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{dh}\frac{dh}{dl};$$

$d\omega = B dh$ (фиг. 24-3),



Фиг. 24-3. Сечение призматического русла.

откуда

$$\frac{d\omega}{dh} = B.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (24-1) и преобразовывая его, получим:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - J}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}. \qquad (24\text{-}25)$$

Ввиду того, что исследуемое движение является плавно изменяющимся, считается возможным его гидравлический уклон определить по формулам для равномерного движения, т. е. считать, что

$$J = \frac{Q^2}{K^2}.$$

В этом случае уравнение (24-25) можно представить в виде:

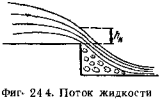
$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - Q^2/K^2}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}}. \qquad (24\text{-}26)$$

Это и есть дифференциальное уравнение свободной поверхности. Из этого уравнения следует, что в зависимости от соотношения числителя и знаменателя глубина потока по длине изменяется: или увеличивается, или уменьшается. Особый интерес представляет то сечение потока, для которого

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = 1. \qquad (24\text{-}27)$$

Назовем это сечение критическим, а глубину потока в этом сечении критической глубиной $h_к$.

Заметим, что соотношение (24-27) может иметь место и при равномерном движении. Уклон равномерного потока, удовле-



Фиг. 24-4. Поток жидкости на перепаде.

Фиг. 24-5. Поток жидкости при гидравлическом прыжке.

творяющего условию (24-27), называется критическим уклоном. Величину критического уклона можно определить из формулы (24-27), подстановкой $Q^2 = K^2 i_к$. Получим:

$$i_к = \frac{g\omega^3}{\alpha B K^2} = \frac{g\omega^3}{\alpha B C^2 \omega^2 R} = \frac{g}{\alpha C^2 B} \cdot \frac{\omega}{R}. \qquad (24\text{-}28)$$

Поток называется бурным, если его глубина меньше $h_к$. Поток называется спокойным, если его глубина больше $h_к$.

Далее будет показано, что в критическом сечении глубина потока или достигает своего минимума ($h_к$) (фиг. 24-4), если она до него в направлении течения уменьшалась, или претерпевает разрыв непрерывности, происходит гидравлический прыжок (фиг. 24-5), если глубина до этого сечения в направлении течения повышалась. При гидравлическом прыжке свободная поверхность потока скачкообразно повышается, что сопровождается резким увеличением глубины потока. Течение переходит от больших скоростей (от бурного потока) к меньшим скоростям (к спокойному потоку).

24-7. Энергия сечения

Понятие критической глубины имеет тесную связь с так называемой энергией сечения.

Энергией сечения — $Э$ — называется удельная энергия потока,

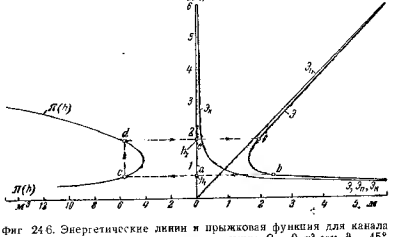
соответствующая избыточному давлению и вычисленная относительно самой низшей точки рассматриваемого сечения

$$Э = h + \frac{\alpha v^2}{2g},$$

или

$$Э = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}. \qquad (24\text{-}29)$$

Таким образом, при вычислении $Э$ в каждом живом сечении выбирается своя плоскость сравнения. В этом и заключается различие между энергией сечения $Э$ и полной удельной энергией



Фиг. 24-6. Энергетические линии и прыжковая функция для канала трапецоидального профиля, соответствующие $Q = 9$ м³/сек, $\theta = 45°$ и $b = 1{,}5$ м.

потока E, при вычислении которой для всех сечений выбирается одна и та же горизонтальная плоскость.

Для трапецоидального русла согласно формуле (24-19)

$$Э = h + \frac{\alpha Q^2}{2gh^2[b + hm]^2}. \qquad (24\text{-}30)$$

Если русло потока имеет горизонтальное дно, уровень которого принять за уровень плоскости сравнения, то энергию сечения можно рассматривать как полную удельную энергию потока.

Из фиг. 24-6, на которой показана зависимость для трапецоидального русла

$$Э = f(h),$$

следует, что удельная энергия сечения имеет минимум при некоторой глубине наполнения

Для определения этой глубины приравняем нулю производную

$$\frac{d\text{Э}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3} = 0,$$

откуда

$$1 = \frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}. \qquad (24\text{-}31)$$

Сопоставляя формулу (24-31) с формулой (24-27), найдем, что минимального значения Э достигает при критической глубине. Заметим еще раз, что если дно потока горизонтально, то в критическом сечении минимальное значение имеет и полная удельная энергия. Этот важный вывод имеет существенное значение при исследовании многих явлений; два таких явления будут рассмотрены.

24-8. Формы свободной поверхности

Форма свободной поверхности зависит от многих условий, которые подробно рассматриваются в специальных учебниках по гидравлике[1].

Здесь рассмотрим формы свободной поверхности только при пологом уклоне, т. е. при $i < i_к$.

I случай. Равномерное спокойное движение жидкости, совершавшееся с нормальной глубиной $h_0 > h_к$, нарушено устройством плотины (см. фиг. 24-2). Анализ уравнения (24-26) показывает, что глубины потока увеличиваются по направлению течения с h_0 до h_1 а свободная поверхность только, понижаясь, стремится к горизонтальной плоскости.

II случай. Равномерное движение жидкости нарушено устройством перепада (см. фиг. 24-4).

Свободная поверхность жидкости в своем стремлении к понижению в этом движении не может на пороге опуститься ниже критической глубины, так как в противном случае критическая глубина $h_к$ установилась бы где-то на пороге и движение на оставшейся части порога могло бы происходить только с подъемом энергии извне. Таким образом, расход на перепаде при плавно изменяющемся движении будет соответствовать минимуму энергии на его конце. Заметим, что так как на конце порога движение становится криволинейным, сделанный выше вывод оказывается верным лишь приблизительно.

III случай. Гидравлический прыжок. Жидкость вытекает из под затвора в бурном состоянии (фиг 24-7) в канал, в котором равномерное движение является спокойным ($h_0 > h_к$). Стремясь

[1] И. И. Агроскин, Г. Т. Дмитриев, Ф. И. Пикалов, Гидравлика, Госэнергоиздат, 1954; М. Д. Чертоусов, Специальный курс гидравлики, Госэнергоиздат, 1949.

к равномерному движению, поток в некотором сечении должен достичь глубины $h_к$ и затем ее превзойти. Такой переход может быть совершен только через гидравлический прыжок.

Фиг. 24-7. Сопряжение потока из-под затвора с потоком в русле происходит посредством гидравлического прыжка.

Фиг. 24-8. Различные случаи сопряжения свободной поверхности.
1 — в потоке, полностью спокойной, 2 — в потоке на перепаде, 3 — в потоке из-под затвора.

В этом случае на длине прыжка $l_п$ происходит резкий переход от глубины $h_1 < h_к$ к глубине $h_2 > h_к$. Глубины h_1 и h_2 называются взаимными глубинами. Их разность называется высотой прыжка.

На фиг. 24-8 совмещены все три формы свободной поверхности.

24-9. Уравнение прыжка

Рассмотрим случай прыжка на горизонтальном участке. Как следует из фиг. 24-6, повышение глубины потока до $h_к$ сопровождается уменьшением энергии потока. Поэтому такое движение потока физически возможно.

После достижения потоком глубины $h_к$ и при ее дальнейшем росте энергия потока начинает возрастать. Такое движение физически могло бы иметь место только в том случае, если бы извне к жидкости подводилась энергия, необходимая не только для компенсации ее увеличившейся части, но и для покрытия потерь вследствие гидравлических сопротивлений. Так как никакого подвода энергии нет, то единственный способ дальнейшего движения — это прыжок, позволяющий перейти на верхнюю ветвь энергетической линии. Такой переход всегда сопровождается значительной потерей гидравлической энергии. Поэтому энергия потока Э_1 (соответствующая глубине h_1) всегда будет больше энергии потока Э_2, при глубине h_2 (фиг. 24-5), вследствие чего гидравлический прыжок должен произойти обязательно при глубинах, меньших $h_к$, для того, чтобы поток располагал до прыжка некоторым резервом энергии, необходимой для преодоления потерь в прыжке.

Уравнение прыжка выражает зависимость между взаимными глубинами. Для получения этого уравнения рассмотрим прыжок

в горизонтальном русле и воспользуемся теоремой об изменении количества движения в форме, аналогичной внезапному расширению (см. § 15 2). Внешними силами трения пренебрегаем.

В рассматриваемом случае (фиг. 24 5) за p_1 и p_2 могут быть взяты избыточные давления в центре тяжести сечений ω_1 и ω_2 В этом случае

$$p_1 = \gamma h_{T1} \quad \text{и} \quad p_2 = \gamma h_{T2}.$$

Имея в виду, что

$$Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2,$$

будем иметь:

$$\beta_2 \rho v_2^2 \omega_2 - \beta_1 \rho v_1^2 \omega_1 = p_1\omega_1 - p_2\omega_2. \qquad (24\ 32)$$

Подставляя в уравнение (24-32) необходимые величины, получим:

$$\beta_1 \frac{Q^2}{g\omega_1} + h_{T1}\omega_1 = \beta_2 \frac{Q^2}{g\omega_2} + h_{T2}\omega_2. \qquad (24\ 33)$$

Выражения

$$\beta \frac{Q^2}{g\omega} + h_T\omega = \pi(h) \qquad (24\text{-}34)$$

называются прыжковой функцией. Из уравнения (24-33) следует, что прыжковая функция $\pi(h)$ имеет одно и то же значение в обоих сечениях прыжка. Прыжковая функция показана на фиг. 24-6 слева. Легко показать и аналитически, что минимум прыжковой функции соответствует критической глубине.

Уравнение прыжка может быть представлено в виде

$$\pi(h_1) = \pi(h_2). \qquad (24\text{-}35)$$

Фиг. 24-6 позволяет весьма просто определять взаимные глубины, а также находить потери энергии в прыжке, если одна из взаимных глубин известна. Например, чтобы найти глубину h_2 и соответствующие прыжку потери по заданной h, надо (фиг. 24 6) из точки a провести вправо и влево горизонталь до пересечения ее с энергетической линией и прыжковой функцией в точках b и c.

Точка c позволит определить значение прыжковой функции, а точка b значение энергии в первом сечении прыжка. Из точки c провести вертикаль до пересечения с верхней ветвью прыжковой функции в точке d Горизонталь def точкой e определяет взаимную глубину h_2, а точкой f определяет энергию во втором сечении прыжка — $Э_2$. Разность энергий $Э$. $Э_2$ равна потерям удельной энергии в прыжке.

24-10. Интегрирование дифференциального уравнения свободной поверхности

Прежде чем интегрировать уравнение (24-26), выразим расход Q через модуль расхода K_0, соответствующий равномерному движению

$$Q^2 = K_0^2 i. \qquad (24\text{-}36)$$

При этом уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{dh}{dl} = i\,\frac{1 - \dfrac{K_0^2}{K^2}}{1 - \dfrac{\alpha i K_0^2 B}{g\omega^3}}. \qquad (24\text{-}37)$$

Разделяя переменные, будем иметь:

$$idl = \frac{1 - \dfrac{\alpha i K_0^2 B}{g\omega^3}}{1 - K_0^2/K^2}\,dh$$

Величина $\frac{g\omega^3}{B}$ может быть выражена через так называемый критический уклон согласно формуле (24-28)

$$\frac{g\omega^3}{B} = \alpha K^2 i_k \qquad (24\ 38)$$

В связи с этим дифференциальное уравнение может быть представлено в виде:

$$idl = \frac{1 - \dfrac{i}{i_k}\cdot\dfrac{K_0^2}{K^2}}{1 - \dfrac{K_0^2}{K^2}}\cdot dh,$$

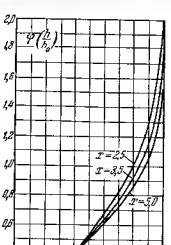
или после элементарных преобразований в виде:

$$idl = dh + \left(1 - \frac{i}{i_k}\right)\cdot\frac{dh}{\dfrac{K^2}{K_0^2} - 1}. \qquad (24\text{-}39)$$

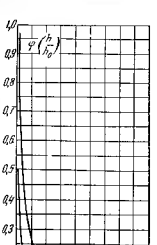
Как показывают исследования, отношение K/K_0 может быть выражено в зависимости от $\left(\frac{h}{h_0}\right)$:

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^x, \qquad (24\ 40)$$

где h_0 глубина, соответствующая равномерному движению. Показатель степени x зависит от формы живого сечения, изменяясь, например, в призматических руслах в пределах от $x = 2$



Фиг 24 9. Зависимость $\varphi\left(\frac{h}{h_0}\right)$ от $\frac{h}{h_0}<1$.



Фиг 24 10 Зависимость $\varphi\left(\frac{h}{h_0}\right)$ от $\frac{h}{h_0}>1$

(глубокий прямоугольный канал) до $x=5,5$ (треугольный канал). В трапецоидальных каналах $x=3\div 4$. Подставляя значение K/K_0 из формулы (24 40) в уравнение (24-39), получим.

$$i\,dl=h_0\left[d\left(\frac{h}{h_0}\right)+\left(1-\frac{i}{i_к}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{h}{h_0}\right)}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^x-1}\right] \qquad (24\text{-}41)$$

Разбивая поток на участки δl с интервалами h_2-h_1 по глубине, в пределах которых отношение уклонов $i/i_к$ можно рассматривать как постоянное, найдем после интегрирования

$$i\delta l=h_0\left[\left(\frac{h_2}{h_0}\right)-\left(\frac{h_1}{h_0}\right)+\left(1-\frac{i}{i_к}\right)(\varphi_2-\varphi_1)\right], \qquad (24\text{-}42)$$

где $\varphi=\int\frac{d\left(\frac{h}{h_0}\right)}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^x-1}$

Значения φ обычно приводятся в таблицах и показаны на фиг 24-9 и 24-10.

Для каналов с нулевым уклоном ($i=0$), что весьма часто имеет место вблизи гидротехнических сооружений, уравнение (24-1) приводится к виду (так как $\frac{d\eta}{dl}=0$):

$$\frac{dh}{dl}-\frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}\frac{dh}{dl}+\frac{Q^2}{K^2}=0. \qquad (24\text{-}43)$$

Теперь расход Q выразим через критический уклон $i_{кк}$, который превращает движение с расходом Q в критическое при критической глубине $h_к$.

В этом случае

$$Q^2=K_к^2 i_{кк}. \qquad (24\text{-}44)$$

Величина $B/g\omega^3$ попрежнему равна:

$$\frac{B}{g\omega^3}=\alpha i_к K^2 \qquad (24\text{-}45)$$

После подстановки значений в уравнение (24 43), получим:

$$\frac{dh}{dl}\cdot\left(1-\frac{i_{кк}}{i_к}\frac{h_к^x}{h^x}\right)=-i_{кк}\frac{h_к^x}{h^x} \qquad (24\text{-}46)$$

и окончательно

$$dl=\frac{h_к}{i_{кк}}\left[\frac{i_{кк}}{i_к}-\left(\frac{h}{h_к}\right)^x\right]d\left(\frac{h}{h_к}\right),$$

откуда

$$\delta l=\frac{h_к}{i_{кк}}\left\{\frac{i_{кк}}{i_к}\left[\left(\frac{h}{h_к}\right)_2-\left(\frac{h}{h_к}\right)_1\right]+\frac{1}{x+1}\left[\left(\frac{h}{h_к}\right)_1^{x+1}-\left(\frac{h}{h_к}\right)_2^{x+1}\right]\right\}. \qquad (24\text{-}47)$$

Глава двадцать пятая

ВОДОСЛИВЫ

Водосливом называется преграда на пути потока жидкости (плотина или стенка, перегораживающая канал) в той ее части, через которую переливается жидкость. Практическое значение водосливов чрезвычайно велико. Они являются важными элементами гидротехнических сооружений, а некоторые их типы широко применяются как весьма точные приборы для измерения расходов в гидравлических и гидротехнических лабораториях и в ряде других случаев.

Большой вклад в изучение потока через водослив внесли русские и советские ученые В. Брашман, Б. А. Бахметев, Н. Н. Павловский, Г. Ф. Проскура, М. Д. Чертоусов, а также М. З. Абрамов, А. Н. Ахутин, А. Р. Березинский, П. Г. Киселев,

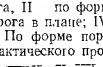
Д. И. Кумин, С. А. Офицеров, Ф. И. Пикалов, Н. П. Розанов, Г. И. Сухомел, А. И. Шварц и многие другие.

Из иностранных ученых следует отметить французского ученого Базена, чьи исследования не потеряли своего значения до настоящего времени, а также Кригера, Томсона, Френсиса

25-1. Классификация водосливов

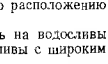
Несмотря на большое разнообразие, водосливы классифицируются по четырем главнейшим признакам: I — по форме порога, II — по форме сливного отверстия; III — по расположению порога в плане; IV — по характеру струи.

По форме порога водосливы принято делить на водосливы практического профиля (фиг. 25-1—25-4), водосливы с широким



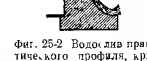
Фиг. 25-1. Водослив практического профиля, прямоугольный незатопленный.

Фиг. 25-2. Водослив практического профиля, криволинейный, незатопленный.

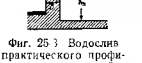


Фиг. 25-3. Водослив практического профиля, прямоугольный, затопленный.

Фиг. 25-4. Водослив практического профиля, криволинейный, затопленный.



Фиг. 25-5. Водослив с широким порогом, незатопленный.



Фиг. 25-6. Водослив с широким порогом, затопленный.

порогом (фиг. 25-5, 25-6) и водосливы с тонкой стенкой (см. фиг. 11-1).

Наиболее полно изучены водосливы, имеющие прямоугольное и треугольное сливные отверстия в тонкой стенке, расположенной перпендикулярно к потоку. Достаточно удовлетворительно исследованы водосливы практических профилей, которые мало чем отличаются с гидравлической точки зрения от водосливов с тонкими стенками. Сравнительно мало исследованы водосливы с широким порогом.

25-2. Движение жидкости через водослив с тонкой стенкой

Для ребра водослива может быть взят заостренный железный лист. К водосливу с тонкой стенкой жидкость подходит со всех сторон; благодаря этому перед ребром водослива (см

фиг. 11-1) траектории частиц жидкости криволинейны. За ребром водослива происходят вертикальное сжатие струи и небольшой подъем струи снизу. Сжатие струи будет большим при меньших значениях угла θ; кроме того, на величине сжатия будет сказываться и значение отношения $\frac{H}{h_n}$. Для вертикального водослива наибольший подъем струи снизу равен 0,11 H. Точка наибольшего подъема от плоскости стенки находится на расстоянии 0,27 H.

Благодаря увеличению скорости уровень поверхности потока будет понижаться. По Базену на расстоянии 3 H от гребня водослива понижение уровня $\delta H = 0{,}003\,H$, у самого гребня $\delta H = 0{,}15\,H$.

Можно считать, что на расстоянии 1,09 H от стенки происходит выпрямление траектории частиц струи и в этом сечении скорости частиц почти параллельны. Распределение давления (избыточного) и скоростей в вертикальном сечении, соответствующем точке k, показано на фиг. 11-1.

Если уровень воды непосредственно за стенкой водослива $h_б$ выше гребня стенки h_n, водослив называется затопленным.

Можно считать, что при этом водослив затоплен, если

$$\left(\frac{z}{h_n}\right) < \left(\frac{z}{h_n}\right)^*, \tag{25-1}$$

где $\left(\frac{z}{h_n}\right)^*$ может быть взято по табл. 25-1.

Таблица 25-1

Значения $\left(\frac{z}{h_n}\right)^*$ в зависимости от $\frac{H}{h_n}$ для водослива с тонкой стенкой

H/h_n	0	0,2	0,5	1,25	2	3
$\left(\frac{z}{h_n}\right)^*$	1	0,85	0,75	0,675	0,71	0,85

Особые формы струи. Если водослив ограничен с боков направляющими стенками, препятствующими притоку воздуха под струю, то благодаря тому, что движущаяся жидкость увлекает за собой воздух, под струей образуется вакуум. Вследствие этого струя отжимается к стенке. Кроме того, благодаря вакууму пространство под струей частично заполняется водой. Происходит

подсасывание жидкости под струю. Водослив с отжатой струей существует при условии, что или

$$\left.\begin{aligned} H &\geqslant 0{,}4h_n, \\ \text{или} \quad H &< 0{,}4h_n, \end{aligned}\right\} \qquad (25\text{-}2)$$

но и

$$z < 2H. \qquad (25\text{-}3)$$

В том случае, если $H > 0{,}4h_n$ и $z > 0{,}75h_n$, получается струя с отогнанным прыжком.

Отогнанный прыжок не оказывает влияния на расход водослива.

Вакуум в пространстве под сливной струей может достичь такого предела, при котором струя или прилипает к стенке водослива, или все пространство под сливной струей заполняется жидкостью. Водослив с прилипшей струей существует при условии, что обязательно

$$H > 0{,}4h_n \quad \text{и} \quad z < 0{,}75h_n \qquad (25\text{-}4)$$

Если при указанных соотношениях все же желательно иметь водослив со свободной струей, необходимо создать условия, при которых струя не касалась бы боковых стенок, а в случае касания их подвести под струю трубу, сообщающуюся с атмосферой, и обеспечить свободный приток воздуха. Как заполнение струи снизу, так и прилипание струи способствуют увеличению расхода.

В табл. 25-2 приведены соотношения между расходами через водосливы с тонкой стенкой при различных сливных струях $H_n = 0{,}75$ *м* и $H = 0{,}4$ *м*.

Таблица 25-2

Соотношения между расходами в зависимости от характера сливной струи для водослива с тонкой стенкой

$H_n = 0{,}75$ *м* и $H = 0{,}4$ *м*

Характер сливной струи	Вентилируемая струя (свободная)	Отжатая струя	Затопленная снизу струя	Прилипшая струя
Расход	Q	$1{,}07\,Q$	$1{,}16\,Q$	$0{,}28\,Q$

Из рассмотрения табл. 25-2 следует, что с точки зрения расхода наиболее целесообразным водосливом является водослив с прилипшей струей. Менее целесообразным водослив со свободной струей. Вместе с тем водослив со свободной струей благодаря устойчивости режима истечения является наиболее желательным, если им пользуются в качестве измерительного прибора.

25-3. Основная расчетная формула водослива с тонкой стенкой

Водослив с тонкой стенкой можно рассматривать как истечение из отверстия в боковой стенке, верхний контур которого находится выше горизонта переливающегося потока. На этом основании при выводе основных зависимостей, характеризующих водослив, пользуются методом исследования вопросов истечений через большое отверстие в боковой стенке (§ 20-4).

Если отверстие постоянной ширины, для определения расхода служит формула (20-41) при $h_1 = 0$ и $h_2 = H$:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right], \qquad (25\text{-}5)$$

отбрасывая член $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$, что будет компенсировано соответствующим изменением μ, получим:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)^{3/2}. \qquad (25\text{-}6)$$

Для отверстия симметричной треугольной формы рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к формуле

$$Q = \frac{8}{15}\mu\frac{b}{H}\sqrt{2g}\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}\right)^{5/2}. \qquad (25\text{-}7)$$

Обозначая напор на водосливе через H_0,

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}. \qquad (25\text{-}8)$$

Заменим обе формулы общей

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}, \qquad (25\text{-}9)$$

в которой m — коэффициент расхода водослива:

$m = \frac{2}{3}\mu$ для отверстия постоянной ширины,

$m = \frac{8}{15}\mu\left(1 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2gH}\right)$ для отверстия треугольного.

Некоторые исследователи представляют формулу для расхода в виде

$$Q = m\left(1 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2gH}\right)^{3/2} b\sqrt{2g}H^{3/2}, \qquad (25\text{-}10)$$

где

$$m\left(1 + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2gH}\right)^{3/2} = m_0. \qquad (25\text{-}11)$$

В формуле (25-10) скорость подхода учитывается коэффициентом расхода m_0 по формуле (25-11).

Для прямоугольного водослива с вертикальной тонкой стенкой среднее значение коэффициента расхода $m \approx 0{,}42$. Для треугольного водослива с симметричным отверстием и углом 90° среднее значение $m = 0{,}318$. Подробнее см. табл. 25-3.

Таблица 25-3

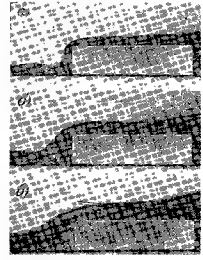
Расчетные формулы для коэффициента расхода водосливов с тонкой стенкой

№ п/п.	Тип водослива	Формула коэффициента расхода
1	Незатопленный прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой без бокового сжатия (фиг. 11 1) $H_p \leqslant 1{,}13$ м, $b = 2$ м; $H \leqslant 1{,}24$ м	Формула Базена—Эгля $m_0 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H}\right) \times \left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H + H_n}\right)^2\right]$
2	Затопленный прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой без бокового сжатия	Формула Базена $m_{0\,зат} = 1{,}05\, m_0 \sigma_з = 1{,}05 \cdot m_0 \left(1 + 0{,}2\,\frac{h_n - h_б}{h_n}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{z}{H}}$
3	Незатопленный прямоугольный водослив с наклонной тонкой стенкой без бокового сжатия. Угол наклона θ	Формула Базена $m_{0\theta} = \kappa m_0$, где $\kappa = 0{,}925$ при $\theta = 45°$; $\kappa = 0{,}958$ при $\theta = 71{,}5°$; $\kappa = 1{,}045$ при $\theta = 108{,}5°$; $\kappa = 1{,}115$ при $\theta = 135°$
4	Незатопленный треугольный водослив с тонкой стенкой с углом $\alpha = 90°$	По опытам Томсона $Q = 1{,}4\, H^{2,5}$ для H от 0,05 до 0,25 м. По опытам Барра в среднем $Q = 1{,}39\, H^{2,5}$ для H от 0,075 до 0,25 м. По опытам Кинга $Q = 1{,}343\, H^{2,47}$ для H от 0,05 до 0,55 м
5	Водослив трапецоидальный $b > 3H_0$	$m = 0{,}42$

25-4. Движение жидкости через водослив с широким порогом

Начиная с расстояния от порога, приблизительно равного $3H$, происходит постепенное понижение уровня жидкости, обусловливаемое увеличением скорости течения. В общем случае движение жидкости через водослив с широким порогом ($\delta/H > 3$) следует рассматривать (фиг. 25-5 и 25-6) как установившееся неравномерное движение в открытом, но коротком русле. Как показывает опыт, форма свободной поверхности жидкости на пороге зависит от отношений δ/H. Кроме того, форма поверхности зависит от уровня жидкости в нижнем бьефе $h_б$.

Рассмотрим случай, когда уровень нижнего бьефа не влияет на течение жидкости на пороге. На фиг. 25-7 приведены фотографические снимки, сделанные автором и показывающие форму потока при различных значениях отношения δ/H. Из приведенных фотографий следует, что при больших значениях отношения δ/H происходит вертикальное сжатие струи. Переход меньшей глубины h_c в сжатом сечении к большей глубине h в некоторых случаях может происходить в виде гидравлического прыжка. По мере уменьшения значения δ/H вертикальное сжатие струи постепенно уменьшается и при $\delta/H = 6$ исчезает. При этом отношении δ/H в средней части порога движение практически может рассматриваться как плавно изменяющееся, с распределением давления в поперечных сечениях по гидростатическому закону. При дальнейшем уменьшении δ/H свободная поверхность потока принимает криволинейную форму. По данным Ф. И. Пикалова и других исследователей на водосливе с $\delta/H < 10 \div 12$ глубина потока всюду меньше критической и достигает на его конце значения $h = (0{,}8 : 0{,}9)\, h_{кр}$.



Фиг. 25-7. Формирование свободной поверхности на водосливе с широким порогом.
а — $\delta/H = 4$; б — $\delta/H = 6$; в — $\delta/H = 10$.

Криволинейность потока на пороге не позволяет в полной мере использовать теорию плавно изменяющегося движения при изучении потока через водослив с широким порогом. Если бы движение на водосливе можно было рассматривать как плавно изменяющееся, то свободный уровень жидкости на водосливе

в своем естественном стремлении к понижению должен был бы опуститься на конце водослива до критической глубины, которой соответствует минимум удельной энергии сечения.

Однако благодаря отсутствию плавной изменяемости движения критическая глубина устанавливается на некотором расстоянии от края водослива.

В зависимости от высоты порога h_n и полного напора $H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ (где v_0 — скорость подхода жидкости к водосливу) уровень жидкости за порогом может быть выше, на уровне или ниже уровня жидкости на пороге.

Водослив называется затопленным, если положение уровня жидкости за порогом влияет на расход. По Бахметеву водослив можно считать затопленным, если

$$h_б - h_n > h_{кр}, \tag{25-12}$$

где $h_{кр}$ — критическая глубина

Если жидкость протекает через порог с глубинами меньше критической, водослив можно рассматривать как затопленный при

$$_б - h_n \geqslant h_{взаим\,2}, \tag{25-13}$$

где $h_{взаим\,2}$ является взаимной глубиной, соответствующей наименьшей глубине (сжатому сечению) (фиг. 25-7) на пороге.

25-5. Основная расчетная формула водослива с широким порогом

Рассмотрим случай, когда движение может быть принято за плавно изменяющееся. В этом случае свободная поверхность опускается над порогом водослива практически до значения $h_{кр}$, которому соответствует минимальное содержание энергии $Э$.

Этот уровень удовлетворяет зависимости

$$\alpha BQ^2 = g\omega^3,$$

или

$$\alpha Q^2 = gh_{кр}^3 B^2.$$

Обозначим статический напор на пороге водослива через h, выбрав два сечения потока: одно, расположенное в зоне перед

водосливом, и второе — на пороге, плоскость сравнения расположим на уровне порога. Напишем уравнение Бернулли:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = h + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \zeta\frac{v_1^2}{2g},$$

где v_0 — скорость подхода жидкости к водосливу,

v_1 — средняя скорость на пороге водослива.

Решая полученное уравнение относительно v_1, найдем

$$v_1 = \varphi\sqrt{2g\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} - h\right)}, \tag{25-14}$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \zeta}}$.

Если ширина порога водослива b, а коэффициент расхода μ в рассматриваемом случае численно равен φ, то для расхода Q через водослив получим следующее выражение:

$$Q = \mu bh\sqrt{2g\left(H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} - h\right)}, \tag{25-15}$$

или

$$Q = \mu bH_0^{3/2} k\sqrt{2g(1-k)} = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}, \tag{25-16}$$

где при $k = \frac{h}{H_0}$

$$m = \mu k\sqrt{1-k}. \tag{25-17}$$

Сопоставляя формулы (24-27) и (25-16), найдем, что (при $\alpha = 1$)

$$m = \sqrt{\frac{k^3}{2}}, \tag{25-18}$$

а в связи с формулой (25-17)

$$\mu^2 = \varphi^2 = \frac{k}{2(1-k)}, \tag{25-19}$$

откуда

$$k = \frac{2\mu^2}{1+2\mu^2} = \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}. \tag{25-20}$$

Если бы потери энергии отсутствовали $\varphi = \mu = 1$, то в этом случае

$$k = \frac{2}{3},\ h = \frac{2}{3}H_0,\ m = 0{,}385.$$

Благодаря потерям энергии уровень жидкости над порогом водослива меньше $\frac{2}{3}H_0$.

Таким образом, для данного H_0 глубина h, которая устанавливается сама собой на водосливе, зависит от коэффициентов расхода водослива m. Чем больше сопротивление на водосливе, тем меньше коэффициент расхода и тем меньше h.

25-6. Движение жидкости через водослив практического профиля

Несколько иначе движется жидкость через водослив практического профиля. Так же как и в предыдущем случае, струя (см. фиг. 25-1 ... 25-4) смачивает всю верхнюю грань порога, но в сечениях, расположенных на пороге, движение жидкости криволинейно. В зависимости от высоты порога $h_п$, от величины напора H_0 уровень жидкости за порогом может быть ниже гребня водослива или выше гребня.

Можно считать, что водослив затоплен при условии, если $h_б > h_п$ и

$$\left(\frac{z}{h_п}\right) < \left(\frac{z}{h_п}\right)^*, \tag{25-21}$$

где $\left(\frac{z}{h_п}\right)^*$ зависит от профиля водослива и изменяется по Бахметеву в среднем в пределах согласно табл. 25-4.

Таблица 25-4

Значения $\left(\frac{z}{h_п}\right)^*$ в зависимости от $H_0/h_п$ для водослива практического профиля

$H_0/h_п$	0	0,2	0,9	1,5	2	3
$\left(\frac{z}{h_п}\right)^*$	1	0,84	0,76	0,8	0,86	1,05

25-7. Расчетные формулы для определения коэффициента расхода водосливов

Рассматривая приведенные в предыдущих параграфах формулы (25-9), (25-16), можно сделать заключение о том, что для всех типов водосливов, в том числе и для практического профиля (так как он является типом промежуточным), расчетной формулой может служить формула

$$Q = mb\sqrt{2gH_0^{3/2}}. \tag{25-22}$$

Коэффициент расхода через водослив определяется опытным путем. На его величину оказывает влияние большое количество разнообразных факторов, зависящих от типа водослива, формы стенки, водосливного отверстия, сливной струи и т. д.

Таблица 25-5

Расчетные данные для определения коэффициента расхода водосливов некоторых практических профилей

| № пп | Наименование коэффициента | Затопленный водослив практического профиля | | |

Таблица 25-7

Расчетные данные для определения коэффициента расхода водосливов с широким порогом

№ п/п	Наименование коэффициента	Незатопленный водослив с широким порогом		Затопленный водослив с широким порогом								
		Порог без закругления входного ребра	Порог с закруглением входным ребром	Порог без закругления входного ребра	Порог с закруглением входного ребра							
		(Фиг. 25-5)		(Фиг. 25-6)								
1	Приведенный коэффициент расхода m_n	0,32	0,32	0,32	0,32							
2	Коэффициент формы σ_ϕ	1,00	1,09	1,00	1,09							
3	Коэффициент полноты напора $\sigma_н$	1	1	1	1							
4	Коэффициент затопления $\sigma_з$	1	1	$\frac{h}{H_0}$	до 0,7	0,8	0,87	0,9	0,94	0,98	0,99	
				$\sigma_з$	1,00	0,929	0,815	0,739	0,638	0,36	0,082	
5	Коэффициент сжатия σ_c	$1-\frac{\Sigma\xi}{b}H_0$		$1-\frac{\xi}{b}H_0$								

Следуя указаниям акад. Н. Н. Павловского, общее выражение для коэффициента расхода может быть представлено в виде:

$$m = m_n \sigma_\phi \sigma_н \sigma_з \sigma_c,$$

где m_n — приведенный коэффициент расхода при $\sigma_\phi \sigma_н \sigma_з \sigma_c = 1$,

σ_ϕ — коэффициент, зависящий от формы гребня плотины;

$\sigma_н$ — коэффициент, зависящий от величины напора H;

$\sigma_з$ — коэффициент, зависящий от характера сопряжения струи с нижним уровнем воды (коэффициент затопления);

$\sigma_c = 1 - \frac{\xi}{b} \cdot H_0$ — коэффициент, зависящий от сжатия струи;

ξ — берется по табл. 25-5.

Таблица 25-5

Значение коэффициента ξ для определения

$$\sigma_c = 1 - \frac{\xi}{b} H_0$$

$\xi = 0,2$	$\xi = 0,4$	$\xi = 0,08$
Фиг. 25-8.	Фиг. 25-9.	Фиг. 25-10.

Таким образом, расчетной формулой будет

$$Q = m_n \sigma_\phi \sigma_н \sigma_з \sigma_c b \sqrt{2gH_0^{3/2}}. \qquad (25\text{-}23)$$

О значении коэффициентов см. табл. 25-3, 25-6 и 25-7.

В этих таблицах $H_{пр}$ означаем проектную величину напора.

Глава двадцать шестая

ГИДРАВЛИКА ГАЗОВ

В предыдущих главах в основном были изложены вопросы гидравлики капельной жидкости. В настоящей главе будет рассмотрена только сжимаемая жидкость — газ.

Рассматриваемые вопросы представляют лишь небольшую часть вопросов газовой динамики, блестящее развитие которой обязано работам Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, по праву считающихся творцами и аэромеханики и газовой динамики.

26-1. Уравнение равновесия газа. Стандартная атмосфера

Уравнение равновесия газа в конечной форме получим из уравнения

$$dz + \frac{dp}{\gamma} = 0$$

Интеграл этого уравнения зависит от изменения состояния газа, которое, как известно, подчиняется уравнению

$$p = \gamma RT.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение значение γ, получим

$$dz = RT\frac{dp}{p}. \qquad (26\text{-}1)$$

В дальнейшем интегрирование уравнения произведем для так называемой стандартной международной атмосферы. Согласно этой общепринятой атмосфере в пределах до 11 000 *м* (тропосферы) температура падает с +15° на уровне моря по 6,5° С на каждые 1 000 *м* высоты.

Таким образом, для тропосферы дифференциальное уравнение может быть представлено в виде:

$$-dz = R\frac{dp}{p}\cdot(288 - 0{,}0065z),$$

где z в метрах.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$-\frac{1}{R}\int_0^h \frac{dz}{288 - 0{,}0065z} = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p},$$

откуда

$$\frac{1}{0{,}0065R}\ln\frac{288 - 0{,}0065h}{288} = \ln\frac{p}{p_0},$$

или

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{h}{44\,300}\right)^{5{,}256}. \qquad (26\text{-}2)$$

Выше 11 000 *м* (в стратосфере) принимается изотермическое изменение состояния газа ($t = -56{,}5°$ С).

Таблица 26-1

Международная стандартная атмосфера

h, *м*	t, °С	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	p, *мм рт. ст.*	ρ, *кг/сек²м⁻⁴*	Скорость звука, *а м/сек*
−1 000	21,50	1,1244	1,0996	854,59	0,1274	345
−500	18,25	1,0608	1,0489	8[illegible]6,[illegible]7	0,1311	343
0	15,00	1,0000	1,0000	76[illegible],[illegible]0	0,[illegible]50	341
500	11,75	0,9421	0,9528	7[illegible]5,[illegible]9	0,1191	339
1 000	8,50	0,8870	0,9074	674,[illegible]7	0,1[illegible]34	337
1 500	5,25	0,8344	0,8607	[illegible]4,[illegible]6	0,1079	335
2 000	2,00	0,7845	0,8215	5[illegible],[illegible]8	0,1[illegible]7	333
2 500	−1,25	0,7370	0,7816	5[illegible],[illegible]7	0,[illegible]976	331
3 000	−4,50	0,6918	0,7410	5[illegible]5,75	0,[illegible]9[illegible]7	329
3 500	−7,75	0,6490	0,7015	493,[illegible]5	0,0880	327
4 000	−11,00	0,6082	0,6685	4[illegible],91	0,0835	326
4 500	−14,25	0,5696	0,6347	432,86	0,0792	324
5 000	−17,50	0,5330	0,6007	405,04	0,0751	322
5 500	−20,75	0,4983	0,5689	378,68	0,07[illegible]	319
6 000	−24,00	0,4655	0,5383	353,73	0,0673	317
6 500	−27,25	0,4344	0,5090	330,13	0,0636	315
7 000	−30,50	0,4050	0,4810	307,82	0,0601	313
7 500	−33,75	0,3773	0,4542	286,74	0,0568	31[illegible]
8 000	−37,00	0,35[illegible]	0,4285	366,85	0,0535	309
8 500	−40,25	0,3[illegible]62	0,4039	248,11	0,0505	307
9 000	−43,50	0,3032	0,3805	230,42	0,0475	305
9 500	−46,75	0,2813	0,3581	2[illegible]3,78	0,0447	302
10 000	−50,00	0,2606	0,3367	[illegible]98,12	0,[illegible]4[illegible]	300
10 500	−53,25	0,2413	0,3163	183,41	0,0395	298
11 000	−56,50	0,2232	0,2968	169,60	0,[illegible]37	296
11 500	−56,50	0,2065	0,2743	156,73	0,0343	296
12 000	−56,50	0,1906	0,2535	144,8[illegible]	0,0317	296
12 500	−56,50	0,1761	0,2343	133,[illegible]5	0,0293	296
13 000	−56,50	0,1628	0,2165	123,69	0,027	296
13 500	−56,50	0,1504	0,2001	114,3	0,0250	296
14 000	−56,50	0,1390	0,1849	105,64	0,023	296
14 500	−56,50	0,1284	0,1709	97,62	0,0214	296
15 000	−56,50	0,1187	0,1579	90,22	0,0197	296

Для этого случая дифференциальное уравнение примет вид:

$$-\int_0^h dz = RT\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p},$$

или после интегрирования

$$h = RT\ln\frac{p}{p_0},$$

откуда

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{RT}},$$

или

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{6\,340}}. \qquad (26\text{-}3)$$

Формулы (26-2) и (26-3) широко применяются в авиации и позволяют определить высоту положения самолета по показаниям барометра.

В табл. 26 1 приведены данные, относящиеся к междуна родной стандартной атмосфере.

Изменение объемного веса в тропосфере подчиняется уравнению

$$\gamma = \gamma_0\left(1 - \frac{h}{44\,300}\right)^{4,256}, \qquad (26\text{-}4)$$

а в стратосфере

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{h}{6\,340}}. \qquad (26\text{-}5)$$

Зависимости, даваемые стандартной атмосферой, довольно близко подходят к тем средним величинам давлений, плотностей и температур, которые наблюдаются в наших широтах, конечно, при условии, что на уровне моря температура имеет исходное значение, т. е. $t = 15°$ С, что, конечно, не всегда соответствует зимним условиям.

26-2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеального газа при установившемся движении. Уравнение неразрывности

Для вывода уравнения Бернулли для элементарной струйки газа воспользуемся уравнением Эйлера в естественной форме в виде:

$$g_l dl - \frac{1}{\rho} dp = d\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Выбрав оси координат так, чтобы ось z была параллельна направлению силы тяжести, будем иметь (фиг. 8 5):

$$g_l = g\cos\theta = -g\frac{\partial z}{\partial l} = -g\frac{dz}{dl}$$

После подстановки получим

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = 0. \qquad (26\text{-}6)$$

Из уравнения (2-19) следует, что

$$\frac{dp}{\gamma} = Cn\gamma^{n-2}d\gamma,$$

откуда

$$\int \frac{dp}{\gamma} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{\gamma}.$$

Интегрируя уравнение (26-6), получим

$$z + \frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \qquad (26\text{-}7)$$

Это и есть уравнение Бернулли для элементарной струйки идеального газа. В уравнении все члены имеют тот же энергетический смысл, что и в соответствующем уравнении для капельной жидкости В частности, $\frac{n}{n-1}\cdot\frac{p}{\gamma}$ является мерой удельной потенциальной энергии давления и измеряет работу, совершаемую силами гидродинамического давления в газе, состояние которого изменяется политропически от p до $p = 0$. Эта работа в n раз больше работы только расширения газа в тех же пределах и учитывает также превращение внутренней энергии газа. Этот член определяется высотой столба газа с политропическим изменением состояния и давлением p в основании столба, т. е. в данной точке.

Уравнение (26-7) можно представить в виде:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{n-1}\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \qquad (26\text{-}8)$$

Воспользовавшись уравнением состояния $p = \gamma RT$, получим:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + \frac{RT}{n-1} = \text{const}. \qquad (26\text{-}9)$$

В уравнении (26-9) величина $\frac{RT}{n-1}$ называется температурным напором.

Называя попрежнему z, $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{u^2}{2g}$ геометрическим, пьезометрическим и скоростным напором, полученное уравнение можно сформулировать следующим образом:

В установившемся движении частицы идеального газа ее полный напор, слагающийся из геометрического, пьезометрического, скоростного и температурного напора, сохраняет постоянное значение.

Для двух частиц газа на одной и той же линии тока это уравнение запишется в виде:

$$z_1 + \frac{n}{n-1}\frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1}\frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{u_2^2}{2g}; \qquad (26\text{-}10)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{RT_1}{n-1} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{RT_2}{n-1}. \qquad (26\text{-}11)$$

Так же как и для частицы идеальной жидкости, полученное уравнение движения частицы газа можно рассматривать как уравнение, написанное для одной и той же частицы, для ее двух положений.

Полученное уравнение Бернулли для частицы идеального газа можно распространить и на поток идеального газа, с гидростатическим законом распределения давления по сечениям, если вместо скорости частицы газа ввести среднюю скорость в данном сечении v и коэффициент кинетической энергии α. Так будем поступать, исследуя вопросы истечения газов из небольших отверстий или, например, при движении воздуха через карбюратор. Другим важным уравнением является уравнение неразрывности газовой струи (8-11).

$$\rho_1 v_1 \omega_1 = \rho_2 v_2 \omega_2,$$

которое в связи с уравнением (2-36) может быть представлено в виде:

$$p_1^{1/n} v_1 \omega_1 = p_2^{1/n} v_2 \omega_2. \qquad (26\text{-}12)$$

26-3. Скорость звука в газе

Одной из важнейших гидродинамических характеристик сжимаемой жидкости, в том числе и газа, является скорость звука. В § 19-3 скорость звука в упругой среде (скорость ударной волны) определялась по формуле

$$a^2 = \frac{K}{\rho},$$

или в связи с формулой (2-31)

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Представляя p в виде:

$$p = \frac{p}{\rho^n} \rho^n,$$

где для политропического изменения состояния

$$p/\rho^n = \text{const},$$

получим:

$$a^2 = \left(\frac{p}{\rho^n}\right) n \rho^{n-1} = n \frac{p}{\rho}. \qquad (26\text{-}13)$$

Таким образом, каждому состоянию газа будет соответствовать своя скорость звука. В табл. 26-1 приведены значения скорости звука, соответствующие атмосфере.

26-4. Истечение газа через насадок

Рассмотрим истечение газа через насадок, показанный на фиг. 20-14. Для определения скорости истечения и расхода воспользуемся уравнением (26-10) для средней скорости, приняв $v_1 = 0$ и $\alpha = 1$. Влиянием веса и потерями удельной энергии пренебрегаем. При этом получим:

$$\frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{n}{n-1} \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда в связи с уравнением (2-36), найдем:

$$v_2 = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \; [м/сек], \qquad (26\text{-}14)$$

$$G = \gamma_2 \omega_2 v_2 = \omega_2 \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \; [кГ/сек]. \qquad (26\text{-}15)$$

Исследуем полученные зависимости. Начнем с уравнения для весового расхода. На фиг. 26-1 показана зависимость G от отношения $\beta = \frac{p_2}{p_1}$. Согласно этой зависимости расход достигает максимального значения при некотором значении $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, называемом критическим — $\beta_{кр}$. Для определения $\beta_{кр}$ приравняем нулю производную от G по β, получим:

$$\frac{dG}{d\beta} = \frac{2}{n} \beta^{\frac{2-n}{n}} - \frac{n+1}{n} \beta^{\frac{1}{n}} = 0,$$

откуда

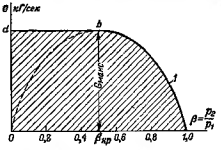
$$\beta_{кр} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{кр} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \qquad (26\text{-}16)$$

При $n = 1{,}405$ (для воздуха) критическое отношение давлений равно:

$$\beta_{кр} = \left(\frac{2}{2{,}41}\right)^{\frac{1{,}41}{0{,}41}} = 0{,}528$$

Подставляя $\beta_{кр}$ в формулу расхода, найдем

$$G_{макс} = \omega_2 \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}} - \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}\right]},$$



Фиг. 26-1. Зависимость весового расхода газа G кГ/сек от отношения $p_2/p_1=\beta$.

или

$$G_{макс}=\omega_2\sqrt{gn\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}p_1\gamma_1}. \qquad (26\text{-}17)$$

Скорость истечения, соответствующая максимальному расходу, называется критической скоростью. Ее можно определить, разделив $G_{макс}$ на $\gamma_2\omega_2$. При этом получим:

$$v_{кр}=\sqrt{gn\frac{p_2}{\gamma_2}}=a_2, \qquad (26\text{-}18)$$

где a_2 — согласно формуле (26-13) скорость звука, соответствующая условиям на выходе.

Формулу (26-18) можно представить и в виде:

$$v_{кр}=\sqrt{2g\frac{n}{n+1}RT_1}. \qquad (26\text{-}19)$$

Итак, критическая скорость равна скорости звука, а максимальный расход $G_{макс}$.

Из полученного следует, что максимальный расход $G_{макс}$ соответствует только критической скорости. Покажем, что критическая скорость, равная скорости звука, является предельной скоростью истечения из рассматриваемого насадка. Для того чтобы разобраться с этим важным фактом, воспользуемся уравнением неразрывности, справедливым для канала любой формы:

$$\rho v\omega=\text{const}.$$

Логарифмируя и дифференцируя его, получим:

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dv}{v}+\frac{d\omega}{\omega}=0,$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dv}=-\frac{\omega}{v}\left(1+\frac{v}{\rho}\frac{d\rho}{dv}\right). \qquad (26\text{-}20)$$

Но согласно уравнению (26-6)

$$dv=-\frac{dp}{\rho v}.$$

Причем

$$a^2=\frac{K}{\rho}=\frac{dp}{d\rho}, \qquad (26\text{-}21)$$

откуда

$$dp=a^2d\rho,$$

вследствие чего

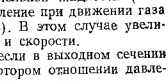
$$dv=-\frac{a^2}{v}\frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставляя dv в уравнение (26-20), получим:

$$\frac{d\omega}{dv}=\frac{\omega}{v}\left(\frac{v^2}{a^2}-1\right). \qquad (26\text{-}22)$$

Из уравнения следует, что при движении газа со скоростью, меньшей скорости звука ($v<a$), увеличение сечения струи влечет уменьшение скорости, как и в капельной жидкости (хотя в других размерах). Иначе протекает явление при движении газа со скоростями больше звуковых ($v>a$). В этом случае увеличение сечения струи влечет увеличение и скорости.

Отсюда следует сделать вывод, что если в выходном сечении насадка (фиг. 20-14) скорость при некотором отношении давлений достигла значения скорости звука, то дальнейшее ее увеличение в этом сечении невозможно. Действительно, если допустить, что скорость в выходном сечении больше скорости звука a, то это значит, что скорость газа достигла скорости звука в некотором другом сечении.



Фиг. 26-2. Схема сопла Лаваля.

Но это могло бы быть только в расширяющемся насадке. Таким образом, в рассматриваемом насадке максимальное значение скорости не может превосходить скорости звука. При этом наступает предел использования пропускной способности насадка. Вследствие этого пунктирная часть зависимости на фиг. 26-1 физически существовать не может. Расход, достигший своего максимума при $\beta_{кр}$, остается в дальнейшем постоянным, сколько бы ни уменьшалось значение β.

Таким образом, в рассматриваемом случае газ не успевает полностью расширяться в насадке и продолжает в дальнейшем расширяться уже после выхода из насадка.

Для большего использования перепада давления, т. е. для получения скорости истечения, большей скорости звука, надо соплу придать форму, показанную на фиг. 26-2. Такое сопло называется соплом Лаваля. Заметим, что скорости больше звуковых можно получить и при истечении через диафрагму благодаря тому, что сжатое сечение газовой струи может соответственно расширяться.

При истечении через сопло Лаваля с правильно рассчитанными размерами скорость истечения газа уже может определяться по формуле (26-14).

На увеличение расхода сопло Лаваля никакого влияния не оказывает, и расход будет определяться по формуле (26-17) для G_{max}, т. е. через критическую скорость $v_{кр}$ и наименьшее поперечное сечение насадка.

Таким образом, при определении расхода G и скорости v при истечении через насадок всегда следует руководствоваться значением отношения p_2/p_1, где p_2 — давление той среды, куда происходит истечение газа, а именно:

1) когда $\frac{p_2}{p_1} > \beta_{кр}$, расход G [*кГ/сек*] и скорость v [*м/сек*] следует определять по формулам (26-14) и (26-15), подставляя в эти формулы вместо p_2 значение давления той среды, куда происходит истечение газа;

2) когда же $\frac{p_2}{p_1} < \beta_{кр}$, расход G [*кГ/сек*] и скорость v [*м/сек*] следует определять по тем же формулам, но подставляя вместо отношения p_2/p_1 значение критического отношения давления согласно уравнению (26-16).

Из формулы (26-22) также следует, что при движении газов со скоростями, меньшими, чем скорость звука в газе, влияние сжимаемости газа невелико и им можно пренебречь, т. е. рассматривать газ как капельную жидкость. На это обстоятельство многократно указывали Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин[1].

В этом случае делается возможным применять в гидравлических расчетах все выведенные ранее формулы для капельной жидкости, в том числе и формулы для определения коэффициентов λ и $\zeta_м$.

Докажем это для скорости истечения газа из отверстия.

Воспользуемся формулой, получаемой из уравнения (26-14),

$$p_2 = p_1\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{v_2^2}{2g}\frac{\gamma_1}{p_1}\right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Разложим выражение в квадратных скобках по формуле бинома Ньютона и оставим только первые три члена разложения:

$$\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{v_2^2}{2g}\frac{\gamma_1}{p_1}\right]^{\frac{n}{n-1}} = 1 - \frac{v_2^2}{2g}\frac{\gamma_1}{p_1} + \frac{1}{2n}\left(\frac{v_2^2}{2g}\frac{\gamma_1}{p_1}\right)^2.$$

Подставляя это значение в выражение для p_2, получим:

$$p_2 = p_1 - \frac{v_2^2}{2g}\gamma_1 + \frac{1}{2n}\left(\frac{v_2^2}{2g}\right)^2\frac{\gamma_1^2}{p_1},$$

[1] Н. Е. Жуковский, Избранные сочинения, т. II, 1948, ГИТТЛ, стр. 150.

откуда

$$p_1 - p_2 = \gamma_1\frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \frac{v_2^2}{4ng}\frac{\gamma_1}{p_1}\right),$$

заменяя $\gamma_1 = \rho_1 g$ и обозначая

$$n\frac{p_1}{\rho_1} = a_1^2,$$

где a_1 — скорость звука в покоящемся газе, получим:

$$p_1 - p_2 = \gamma_1\frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \frac{v_2^2}{4a_1^2}\right),$$

откуда определим скорость:

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{p_1 - p_2}{\gamma_1}\cdot\left[1 - \left(\frac{v_2}{2a_1}\right)^2\right]}. \qquad (26\text{-}23)$$

Во всех случаях, когда отношение $\frac{v_2}{2a_1}$ значительно меньше единицы, а это может иметь место тогда, когда скорость v_2 значительно меньше скорости звука в газе a_1 (в воздухе при $p = 10\,000$ *кГ/м*²; $\rho = 1/8$ *кГ сек*²/*м*⁴; $n = 1{,}4$ скорость звука равна 336 *м/сек*), им можно пренебречь, и тогда скорость истечения газа можно определить по формуле

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{p_1 - p_2}{\gamma_1}}, \qquad (26\text{-}24)$$

а это и есть формула теоретической скорости истечения капельной жидкости.

26-5. Расчет газопроводов

Исходным уравнением для расчета газопроводов будет уравнение (26-6), в которое введены средняя скорость и член, учитывающий потери энергии

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \lambda\frac{dl}{d}\frac{v^2}{2g} = 0. \qquad (26\text{-}25)$$

Ниже мы рассмотрим случай, когда изменением скоростного напора и влиянием веса газа можно будет пренебречь. Тогда

$$\frac{dp}{\gamma} = -\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}.$$

Выразим среднюю скорость v через весовой расход G:

$$v = \frac{G}{\gamma\omega},$$

где ω — площадь поперечного сечения газопровода, тогда

$$\frac{dp}{\gamma} = -\lambda \frac{dl}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2\gamma^2},$$

или

$$-\gamma dp = \lambda \frac{dl}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2}. \qquad (26\text{-}26)$$

Воспользуемся уравнением состояния

$$\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/n},$$

где p_1 и γ_1 — значения давления и объемного веса в начале трубопровода.

Подставляя значение γ в (26-26), получим:

$$-\gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/n} dp = \lambda \frac{dl}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2}.$$

Коэффициент λ можно определить по любой соответствующей формуле для капельной жидкости.

Рассмотрим случай, при котором λ вдоль трубопровода имеет одно и то же значение.

Интегрируя в пределах от p_1 до p_2, где p_2 — давление в конце трубопровода длиной l, получим:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\gamma_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1+n}{n}}\right] = \lambda \frac{l}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2}. \qquad (26\text{-}27)$$

Выразим γ_1 из уравнения состояния $p_1 = \gamma_1 RT_1$ через газовую постоянную R и температуру в начале трубопровода T_1. Будем иметь:

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{RT_1}.$$

Подставляя в уравнение (26-27), найдем:

$$\frac{n}{n+1} \frac{p_1^2}{RT_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] = \lambda \frac{l}{d} \frac{G^2}{2g\omega^2},$$

откуда

$$G = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda} \frac{1}{l} \frac{n}{n+1} \frac{p_1^2}{RT_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}. \qquad (26\text{-}28)$$

Эта формула справедлива при условии, что λ сохраняет по длине трубопровода одно и то же значение, и является основной расчетной формулой для определения весового расхода при за-

данных диаметре трубопровода и перепаде давления. Это уравнение может служить также и для определения диаметра трубопровода при заданных весовом расходе газа и перепаде давления.

Для изотермического состояния газа и для ламинарного движения, так как $n = 1$, а $\lambda = \frac{64}{Re}$. Поэтому

$$G = \frac{\pi d^4}{256\mu l} \frac{p_1^2}{RT_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right], \qquad (26\text{-}29)$$

или

$$G = \frac{\pi d^4}{256\mu l} \frac{1}{RT_1} (p_1^2 - p_2^2). \qquad (26\text{-}30)$$

Для изотермического состояния газа и турбулентного движения

$$G = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5}{16\mu RT_1} (p_1^2 - p_2^2)}. \qquad (26\text{-}31)$$

Формулы (26-30) и (26-31) могут служить также и для определения квадратичного перепада давления:

для ламинарного движения

$$p_1^2 - p_2^2 = k_1 \frac{Gl}{d^4}, \qquad (26\text{-}32)$$

где

$$k_1 = \frac{256\mu RT_1}{\pi}; \qquad (26\text{-}33)$$

для турбулентного движения

$$p_1^2 - p_2^2 = k_2 \frac{\lambda l G^2}{d^5}, \qquad (26\text{-}34)$$

где

$$k_2 = \frac{16RT_1}{\pi^2 g}. \qquad (26\text{-}35)$$

Для трубопровода, состоящего из труб различных диаметров, квадратичный перепад давления вычисляется по формулам:

для ламинарного движения

$$p_1^2 - p_2^2 = k_1 G \Sigma \frac{l_i}{d_i^4}; \qquad (26\text{-}36)$$

для турбулентного движения

$$p_1^2 - p_2^2 = k_2 G^2 \Sigma \frac{\lambda_i l_i}{d_i^5}. \qquad (26\text{-}37)$$

Задача 26-1. Требуется определить теоретическую скорость воздуха в диффузоре карбюратора (фиг. 26-3) при следующих данных: 1) температура наружного воздуха $t_1 = 27°$ С; 2) вакуум в горловине диффузора $h_{вак} = 1\,200$ *мм* вод. ст; 3) высота $h = 0{,}05$ *м* (ею пренебрегаем).

Для определения скорости воздуха в диффузоре карбюратора применим уравнение Бернулли для идеального газа, выбрав за плоскость сравнения плоскость, проходящую через центр входного отверстия, и написав уравнение Бернулли для сечений *I* и *II*.

Подставив вместо $z_1 = 0$; $z_2 \approx 0$; $v_1 \approx 0$, получим:

$$\frac{n}{n-1}\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{n}{n-1}\frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

После преобразования получим формулу (26-14). Подставляя численные значения и вводя вместо p_1 и γ_1 значения R и T_1, найдем:

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{1,41}{0,41}29,27\cdot 300\left[1-\left(\frac{8\,800}{10\,000}\right)^{\frac{0,41}{1,41}}\right]} = 146\ м/сек.$$

Решим теперь ту же самую задачу, приняв воздух несжимаемым, т. е. воспользуемся уравнением Бернулли для капельной жидкости, пренебрегая потерями. Оно имеет вид:

Фиг. 26-3. Схема воздушного канала карбюраторного устройства.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

положим в нем согласно нашим условиям $z_1 = 0$; $z_2 = 0$ и $v_1 = 0$, получим:

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{p_1 - p_2}{\gamma}}.$$

Определим объемный вес воздуха при нормальном давлении $p = 10\,000\ кГ/м^2$ из уравнения

$$\gamma = \frac{p}{RT} = \frac{10\,000}{29,27\cdot 300} = 1,14\ кГ/м^3,$$

находим:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 9,81\,(10\,000 - 8\,800)}{1,14}} = 144\ м/сек.$$

Как видим, разница в скорости, определенной с учетом сжимаемости газа и без учета, невелика. Причину этого мы рассмотрели в предыдущем параграфе.

В заключение определим теоретический весовой расход воздуха, проходящего через диффузор карбюратора, для тех же условий, задавшись сечением диффузора $\omega_2 = 4\ см^2$. Воспользуемся формулой (26-15). Подставляя числовые значения, найдем:

$$G = 0,0004\sqrt{2\cdot 9,81\frac{1,41}{0,41}10\,000\cdot 1,14\left[\left(\frac{8,8}{10}\right)^{\frac{2}{1,41}} - \left(\frac{8,8}{10}\right)^{\frac{2,41}{1,41}}\right]} =$$

$$= 0,0516\ кГ/сек.$$

Задача 26-2. Газ под давлением 50 $кГ/см^2$ вытекает в среду, имеющую давление, равное 30 $кГ/см^2$. Начальная температура газа $T_1 = 300°$ С; газовая постоянная $R = 30\ м/°$. Диаметр отверстия, через которое происходит

истечение, 3 *мм*. Определить теоретические расход газа за 0,1 сек. и скорость истечения, предполагая изменение состояния газа по адиабате $n = 1,4$.

Решение. Имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{30}{50} = 0,6 > \beta_{кр},$$

т. е. первый случай истечения. При этом давление газа при истечении p_2 будет равно давлению среды, т. е. 30 $кГ/см^2$.

Скорость истечения газа определится по формуле, которую представим в виде:

$$v = \sqrt{2g\frac{n}{n-1}RT_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]};$$

подставляя числа, найдем:

$$v = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot\frac{1,4}{0,4}\cdot 30\cdot 300\left[1-\left(\frac{30}{50}\right)^{\frac{0,4}{1,4}}\right]} = 484\ м/сек.$$

Расход газа за $t = 0,1$ сек. найдется по формуле (26-15),

$$G = t\omega\sqrt{2g\frac{n}{n-1}p_1\gamma_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]},$$

где ω — площадь сечения выходного отверстия, равная

$$\omega = 0,785d^2 = 0,785\cdot 0,003^2 = 0,000007\ м^2;$$

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{RT_1}.$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$G = 0,1\cdot 7\cdot 10^{-6}\sqrt{2\cdot 9,81\cdot\frac{1,4\cdot 50^2\cdot 10\,000^2}{0,4\cdot 30\cdot 300}\left[\left(\frac{30}{50}\right)^{\frac{2}{1,4}} - \left(\frac{30}{50}\right)^{\frac{2,4}{1,4}}\right]} = 0,028\ кГ.$$

Задача 26-3. Кислород под давлением 100 $кГ/см^2$ вытекает через сопло из сосуда в атмосферу. Определить скорость истечения кислорода и давление кислорода при вытекании. Начальная температура кислорода $t = 27°$ С.

Решение. В данном примере $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{100} < \beta_{кр}$, поэтому имеется второй случай истечения, в котором полного расширения газа не происходит. Давление кислорода при истечении будет равно:

$$p_2 = \beta_{кр}p_1;\quad p_2 = 0,528\cdot 100 = 52,8\ кГ/см^2.$$

Скорость истечения определится по формуле (26-19)

$$v = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot\frac{1,4}{2,4}\cdot\frac{848}{32}\cdot 300} = 300,8\ м/сек.$$